УДК 531:533.6.013.4

В. А. Куземко, кандидат
физико-математических наук, проректор
Академии таможенной службы Украины
И. А. Костюшко, кандидат
физико-математических наук, доцент
Запорожского национального университета

РЕЗОНАНС ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ МОМЕНТОВ

Для динамически симметричного космического аппарата решена задача стабилизации относительного положения равновесия с помощью внешних моментов, формирующихся из постоянных и нелинейных составляющих. В линейной постановке получены условия стабилизации постоянными моментами, в нелинейной – условия стабилизации внешними моментами. Доказана невозможность стабилизации при внутреннем резонансе третьего порядка.

Ключевые слова: *устойчивость; космический аппарат; функция Ляпунова; первое приближение; внешние моменты; резонанс.*

For a dynamically symmetric spacecraft solved the problem of stabilization of the relative equilibrium with the external side, the emerging of the permanent and non-linear components. In the linear formulation obtained conditions for the stabilization constant moments. In the non-linear setting the impossibility of stabilizing the constant moments, we obtain conditions for the stabilization of the external moments with the addition of non-linear components. Proved impossible to stabilize at an internal third-order resonance.

Key words: *stability; spacecraft; Liapunov function; first approximation; external moments; resonance.*

Постановка проблемы. В статье решается задача управления движением динамически симметричного космического аппарата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega_0 = const$. Два главных центральных момента равны $A = B$, момент инерции относительно оси симметрии – C. Исследуются условия стабилизации движения с помощью внешних моментов, формирующихся из постоянных и нелинейных составляющих.

$$M_\theta = \frac{A}{2}\omega_0^2 \sin 2\theta_0 \cos^2\psi_0 + C\Omega\omega_0 \cos\theta_0 \cos\psi_0 - \frac{3}{2}\omega_0^2 \; C - A \; \sin 2\theta_0 - \Gamma_1\dot{\theta}^3 - D_1\dot{\psi}^2\dot{\theta} - L_1 \; \theta - \theta_0 \; ^2 \dot{\theta},$$

$$M_\psi = -\frac{A}{2}\omega_0^2 \sin^2\theta_0 \sin 2\psi_0 - C\Omega\omega_0 \sin\theta_0 \sin\psi_0 - \Gamma_2\dot{\psi}^3 - D_2\dot{\theta}^2\dot{\psi} - L_2 \; \psi - \psi_0 \; ^2 \dot{\psi}.$$

Здесь θ, ψ – обобщенные координаты, $C\Omega$ – циклическая постоянная, $\Gamma_i, Di, L_i \geq 0 \quad i = 1,2$ – параметры задачи. В задаче ставится вопрос о возможности выбора выражений для моментов M_θ, M_ψ таким образом, чтобы в орбитальной системе координат, жестко связанной со спутником, космический аппарат был неподвижным или в инерциальной системе координат спутник имел положение относительного равновесия. Заметим, что $\theta_0 \neq 0, \theta_0 \neq \pi$. Для каждой пары значений θ_0 и ψ_0 можно однозначно определить стабилизирующие моменты M_θ, M_ψ, которые задают соответствующую ориентацию космического аппарата.

Вводя безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$, $x_1 = \theta - \theta_0$, $x_2 = \psi - \psi_0$, запишем уравнения движения космического аппарата в безразмерных величинах [1]:

$$\begin{cases} x_1'' - \frac{1}{2}x_2'^2 \sin 2(x_1+\theta_0) + x_2' \cos(x_2+\psi_0) - x_2' \cos 2(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0) + \\ + \frac{1}{2}\sin 2(x_1+\theta_0)\cos^2(x_2+\psi_0) + \beta[x_2' \sin(x_1+\theta_0) + \\ + \cos(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0)] - \frac{3}{2}(\alpha-1)\sin 2(x_1+\theta_0) = m_\theta, \\ x_2'' \sin^2(x_1+\theta_0) + x_1' x_2' \sin 2(x_1+\theta_0) + x_1' \cos 2(x_1+\theta_0)\cos(x_2+\psi_0) - \\ - x_1' \cos(x_2+\psi_0) - \frac{1}{2}\sin^2(x_1+\theta_0)\sin 2(x_2+\psi_0) - \\ - \beta \sin(x_1+\theta_0)[x_1' + \sin(x_2+\psi_0)] = m_\psi; \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha = \frac{C}{A}$, $\beta = \frac{C\Omega}{A\omega_0}$, штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ. Выражения для безразмерных стабилизирующих моментов имеют вид:

$$m_\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta_0 \cos^2\psi_0 + \beta\cos\theta_0\cos\psi_0 - \frac{3}{2}(\alpha-1)\sin 2\theta_0 - \gamma_1 x_1'^3 - d_1 x_2'^2 x_1' - l_1 x_1^2 x_1',$$

$$m_\psi = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0 \sin 2\psi_0 - \beta\sin\theta_0\sin\psi_0 - \gamma_2 x_2'^3 - d_2 x_1'^2 x_2' - l_1 x_2^2 x_2', \tag{2}$$

где $\gamma_i, d_i, l_i,\ i = 1,2$ – безразмерные положительные параметры. При таком выборе стабилизирующих моментов система уравнений (1) имеет в орбитальной системе координат тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0,\quad x_1' = x_2' = 0$, устойчивость которого исследуется в дальнейшем.

Анализ последних исследований и публикаций. Устойчивость неконсервативных систем – один из разделов механики, имеющий важное практическое значение и вызывавший интерес на протяжении всего минувшего столетия [2; 3]. Задачи исследования устойчивости возникают при рассмотрении систем со следящими и реактивными силами, при проектировании гироскопических устройств, современных конструкций в машиностроении, крупногабаритных космических конструкций. Эти же вопросы возникают при решении задач управления, поскольку нагрузки в объектах систем автоматического регулирования в большинстве случаев являют собой неконсервативные силы. Поэтому анализ и обнаружение новых качественных механических эффектов поведения систем под действием неконсервативных нагрузок представляет значительный интерес.

Среди работ, посвященных исследованию устойчивости стационарных движений динамически симметричного космического аппарата, отметим работу [4]. В ней найдены достаточные условия устойчивости всех стационарных режимов путем построения функции Ляпунова. Стабилизации и управлению спутников постоянными внешними моментами посвящены работы [5; 6]. В работе [7] решена задача стабилизации стационарного движения динамически симметричного спутника-гиростата с помощью приложения внешних моментов. Центр масс спутника движется по круговой орбите. Задача решается в строгой нелинейной постановке.

Цель статьи. Необходимо решить задачу управления движением динамически симметричного космического аппарата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega_0 = const$.

Изложение основного материала. В ходе решения задачи выполним исследование устойчивости в первом приближении и рассмотрим резонанс третьего порядка.

1. Исследование устойчивости в первом приближении. Разлагая нелинейные слагаемые системы (1) в ряды Маклорена, ограничиваясь линейными слагаемыми, получаем систему первого приближения в матричном виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta_0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь g, k_1, k_2, k_3 – определенные тригонометрические функции углов θ_0 и ψ_0, линейным образом зависящие от выбора параметров α и β. Отметим, что матрица M в (3) является положительно определенной.

Согласно теорем Кельвина–Четаева [8], равновесие, устойчивое при одних потенциальных силах, сохраняет устойчивость при добавлении гироскопических сил; если же неустойчивость изолированного положения равновесия под действием одних потенциальных сил имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна. Рассмотрим последовательно три случая: матрица K – положительно определена, отрицательно определена и не является знакоопределенной.

Условия положительной определенности матрицы K:

$$k_1 > 0,\ k_1 k_3 - k_2^2 > 0 \,. \qquad (4)$$

Выполнение неравенств (4) означает, что нулевое положение потенциальной системы $MX'' + KX = 0$ устойчиво и матрица G не влияет на устойчивость.

Если матрица K отрицательно определена, что возможно при выполнении условий:

$$k_1 < 0,\ k_1 k_3 - k_2^2 > 0 \,, \qquad (5)$$

нулевое положение равновесия потенциальной системы неустойчиво. Однако оба собственных значения матрицы K отрицательны, то есть степень неустойчивости четна, а это означает, что устойчивость равновесия системы (3) зависит от матрицы G и в системе возможна гироскопическая стабилизация [6].

Характеристическое уравнение системы (3) имеет вид:

$$\lambda^4 \sin^2\theta_0 + b\lambda^2 + c = 0 \,. \qquad (6)$$

где $b = k_1 \sin^2\theta_0 + k_3 + g^2, \quad c = k_1 k_3 - k_2^2$.

Уравнение (6) биквадратное. Для устойчивости системы (3) необходимо, чтобы уравнение (6) имело две пары чисто мнимых корней, для этого необходимо выполнение условий:

$$b > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4c\sin^2\theta_0 > 0. \tag{7}$$

Таким образом, при выполнении условий (5) и (7) система (3) устойчива и устойчивость достигнута за счет гироскопической стабилизации.

В случае если не выполняются условия (4), (5), то матрица K не является знакоопределенной и положение равновесия потенциальной системы неустойчиво. Матрица K при этом имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение, то есть степень неустойчивости нечетна, следовательно, положение равновесия $X = X' = 0$ системы (3) будет неустойчивым при любом выборе матрицы G [8].

2. Резонанс третьего порядка. В случае знакоопределенной матрицы K характеристическое уравнение (6) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$. Критический случай устойчивости двух пар чисто мнимых корней рассмотрен в [1], где в нелинейной постановке доказана невозможность стабилизации постоянными моментами и получены условия стабилизации внешними моментами с добавлением нелинейных составляющих.

Рассмотрим резонанс третьего порядка, когда выполняется соотношение $\omega_2 = 2\omega_1$. Тогда по теореме Виета для характеристического уравнения (6) получим условие резонанса в виде:

$$\frac{b^2}{25\sin^2\theta_0} = \frac{c}{4}. \tag{8}$$

Здесь из устойчивости в первом приближении нельзя делать вывод об устойчивости нелинейной системы. Для исследования этого критического случая необходимо использовать также нелинейные слагаемые системы (1). Запишем систему (1) в нормальной форме, полагая

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1', y_4 = x_2'.$$

Разлагая нелинейные слагаемые системы (1) в ряды Маклорена, ограничиваясь членами третьего порядка включительно, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_3; \\ y_2' = y_4; \\ y_3' = -k_1 y_1 - k_2 y_2 - g y_4 + Y_{12} + Y_{13} + \ldots; \\ y_4' = \dfrac{1}{\sin^2\theta_0} \quad -k_2 y_1 - k_3 y_2 + g y_3 \quad + Y_{22} + Y_{23} + \ldots \end{cases} \tag{9}$$

Многоточие означает совокупность слагаемых порядка не ниже четвертого; Y_{12}, Y_{22} содержат квадратичные, а Y_{13} и Y_{23} кубические слагаемые аргументов y_1, y_2, y_3, y_4, зависящие от параметров задачи α, β, θ_0, ψ_0, γ_i, d_i, l_i $(i=1,2)$.

В системе (9) введем новые комплексные переменные:

$$\begin{cases} z_1 = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4, \\ z_2 = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + a_4y_4, \\ z_3 = \overline{z_1} = \overline{c_1}y_1 + \overline{c_2}y_2 + \overline{c_3}y_3 + \overline{c_4}y_4, \\ z_4 = \overline{z_2} = \overline{a_1}y_1 + \overline{a_2}y_2 + \overline{a_3}y_3 + \overline{a_4}y_4, \end{cases} \tag{10}$$

где черта означает сопряжение, комплексные постоянные c_i, a_i $(i=\overline{1,4})$ выбираем таким образом, чтобы для линейных слагаемых выполнялись соотношения

$$\frac{dz_1}{d\tau} = i\omega_1 z_1,\ \frac{dz_2}{d\tau} = 2i\omega_1 z_2,\ \frac{dz_3}{d\tau} = -i\omega_1 z_3,\ \frac{dz_4}{d\tau} = -2i\omega_1 z_4.$$

Обратная замена переменных может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} y_1 = m_{11}z_1 + m_{12}z_2 + m_{13}z_3 + m_{14}z_4, \\ y_2 = m_{21}z_1 + m_{22}z_2 + m_{23}z_3 + m_{24}z_4, \\ y_3 = m_{31}z_1 + m_{32}z_2 + m_{33}z_3 + m_{34}z_4, \\ y_4 = m_{41}z_1 + m_{42}z_2 + m_{43}z_3 + m_{44}z_4, \end{cases} \tag{11}$$

где m_{ij} $(i, j=\overline{1,4})$ – известные комплексные величины.

В результате замены переменных (11) система (9) принимает вид

$$\begin{cases} z_1' = i\omega_1 z_1 + Z_{12}(z_1,z_2,z_3,z_4) + Z_{13}(z_1,z_2,z_3,z_4) + \ldots, \\ z_2' = 2i\omega_1 z_2 + Z_{22}(z_1,z_2,z_3,z_4) + Z_{23}(z_1,z_2,z_3,z_4) + \ldots, \\ z_3' = -i\omega_1 z_3 + \overline{Z_{12}}(z_1,z_2,z_3,z_4) + \overline{Z_{13}}(z_1,z_2,z_3,z_4) + \ldots, \\ z_4' = -2i\omega_1 z_4 + \overline{Z_{12}}(z_1,z_2,z_3,z_4) + \overline{Z_{13}}(z_1,z_2,z_3,z_4) + \ldots, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$Z_{12}(z_1,z_2,z_3,z_4) = c_3\tilde{Y}_{12} + c_4\tilde{Y}_{22},\ Z_{13}(z_1,z_2,z_3,z_4) = c_3\tilde{Y}_{13} + c_4\tilde{Y}_{23},$$

$$Z_{22}(z_1,z_2,z_3,z_4) = a_3\tilde{Y}_{12} + a_4\tilde{Y}_{22},\ Z_{23}(z_1,z_2,z_3,z_4) = a_3\tilde{Y}_{13} + a_4\tilde{Y}_{23}.$$

Функции $\tilde{Y}_{ij}$ получаются из Y_{ij} путем подстановки (11).

Выполнив условия (8) с помощью полиномиального преобразования переменных $(z_1,z_2,z_3,z_4) \to (w_1,w_2,w_3,w_4)$, систему (12) можно привести к нормальной форме

$$\begin{cases} w_1' = i\omega_1 w_1 + B_1 w_2 \overline{w_1} + \ldots, \\ w_2' = 2i\omega_1 w_2 + B_2 w_1^2 + \ldots. \end{cases} \tag{13}$$

Коэффициент B_1 равен коэффициенту при $z_2 z_3$ в разложении Z_{12}; B_2 – коэффициент при z_1^2 в разложении Z_{22}. Многоточие означает совокупность слагаемых не ниже третьего порядка.

Далее рассматриваем систему

$$\begin{cases} w_1{}' = i\omega_1 w_1 + B_1 w_2 \overline{w}_1, \\ w_2{}' = 2i\omega_1 w_2 + B_2 w_1^2. \end{cases} \qquad (14)$$

В (14) делаем замену

$$B_1 = b_1 e^{i\beta_1}, \quad B_2 = b_2 e^{i\beta_2}, \quad w_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1}, \quad w_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2}, \quad \psi = \phi_2 - 2\phi_1.$$

Выделяя действительные и мнимые части полученных уравнений, приходим к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \rho_1{}' = 2b_1\rho_1\sqrt{\rho_2}\ \cos\ \ b_1 + \psi\ \ , \\ \rho_2{}' = 2b_2\rho_1\sqrt{\rho_2}\ \cos\ \ \beta_2 - \psi\ \ , \\ \psi' = b_2 \dfrac{\rho_1}{\sqrt{\rho_2}} \sin\ \ \beta_2 - \psi\ \ - 2b_1\sqrt{\rho_2}\ \sin\ \ \beta_1 + \psi\ \ . \end{cases} \qquad (15)$$

Рассмотрим функцию

$$V = \rho_1\sqrt{\rho_2}\ \sin\ \ \beta_2 - \psi\ \ .$$

Вычислим ее производную в силу уравнений системы (15). После преобразований получим

$$V' = 4b_1\rho_1\rho_2\ \sin\ \ \beta_1 + \beta_2\ \ .$$

Анализ коэффициентов B_1, B_2 показал, что при выполнении условия (8) имеет место следующее неравенство:

$$0 < \beta_1 + \beta_2 < \pi,$$

означающее, что $V' > 0$ в области $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0.$ Тогда с помощью уравнения $V = 0$ можно построить область $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$, $\psi' < \psi < \psi''$, в которой выполняются условия теоремы Четаева о неустойчивости.

Выводы из данного исследования и перспективы дальнейших разведок в данном направлении. Из неустойчивости положения равновесия $w_1 = w_2 = 0, \ \ w_1{}' = w_2{}' = 0$ системы (14) можно сделать вывод о неустойчивости положения равновесия системы (13), а следовательно о неустойчивости положения равновесия системы (9) при внутреннем резонансе третьего порядка.

Список использованных источников:

1. Куземко А. В. Стабилизация стационарного движения динамически симметричного космического аппарата с помощью внешних моментов // А. В. Куземко, И. А. Костюшко. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2013. – № 1. – с. 109–112.

2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / Болотин В. В. – М. : Физматгиз, 1961. – 339 с.

3. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. / А. П. Филин. – М. : Наука, 1981. – Т. 3. – 400 с.

4. Черноусько Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника / Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28. – Вып. 1. – С. 155–157.

5. Сарычев В. А. О равновесии спутника под влиянием гравитационных и статических воздействий / В. А. Сарычев, С. А. Гутник // Космические исследования. – 1994. – Т. 32. – № 4–5. – С. 386–391.

6. Sarychev V. Equilibria of a satellite in circular orbit: the influence of a constant torque / V. Sarychev, P. Paglione, A. Guerman // 48th International Astronautical Congress. PaperIAF. – 95. – A.3.09. – Turin, 1997. – 5 p.

7. Агафонов С. А. Стабилизация стационарного движения спутника-гиростата с помощью внешних моментов / С. А. Агафонов, А. Д. Герман // Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 3–6.

8. Четаев Н. Г. Устойчивость движения / Н. Г. Четаев // М. : Наука, 1965. – 208 с.