УДК 539.377:532.72

Є. Г. Іваник, кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики Львівського
національного аграрного університету
П. І. Ванкевич, кандидат технічних наук,
доцент кафедри транспортних технологій
Національного транспортного університету
І. П. Вітрух, кандидат технічних наук,
доцент кафедри транспортних технологій
Національного транспортного університету
Є. К. Вільковський, кандидат технічних наук,
доцент кафедри транспортних технологій
Національного транспортного університету

ДІАГНОСТУВАННЯ І РОЗРАХУНОК МІЦНІСНИХ ПАРАМЕТРІВ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ ЗА ДІЇ ТЕРМОМЕХАНОДИФУЗІЙНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

У квазістаціонарній постановці розглянуто задачу визначення температурного поля, дифузійного насичення та механічних зусиль (поперечної та поздовжньої сил і згинного моменту) в циліндричній оболонці під час дифузійного масоперенесення. Матеріал оболонки припускається двокомпонентним твердим розчином зі сталими початковими значеннями температури і концентрації розчиненої речовини. Вивчення закономірностей розподілу концентраційних напружень є важливим для розрахунків конструктивних елементів, становить основу розробки діагностики відповідальних вузлів конструкцій транспортних систем і механізмів.

В квазистационарной постановке рассмотрена задача определения температурного поля, диффузионного насыщения и механических усилий (поперечная и продольная силы и изгибаемый момент) в цилиндрической оболочке в условиях диффузионного массопереноса. Материал оболочки предполагается двухкомпонентным твердым раствором с постоянными начальными значениями температуры и концентрации растворенного вещества. Изучение закономерностей распределения концентрационных напряжений является существенным моментом в расчетах конструктивных элементов и служит основой при разработке диагностики ответственных узлов конструкций транспортных систем и механизмов.

On the quasistationary approach the problem of determination of the temperature, concentration diffusion saturate field and forces characteristic (length wise and diagonal forces and moment) in cylindrical shell at condition diffusion substance and heat widening into account convective heat exchange with external area is considered. It is accepted that shell's material is two-component hard solution. Study of distribution of the stress concentration is a significant factor in the calculation of structural elements and forms the basis for the development of diagnostic responsible node designs transportation systems and mechanisms.

Ключові слова. Температурні поля, дифузійне насичення, механічні зусилля (поперечна та поздовжня сили і згинний момент), циліндрична оболонка, двокомпонентний твердий розчин.

Вступ. Тонкостінні елементи оболонкового типу широко використовують у конструкціях транспортного машинобудування та будівельних об'єктів. У процесі експлуатації вони зазнають комбінованого впливу таких факторів, як зовнішнє технологічне навантаження та поля різної фізичної природи, зокрема, теплові, дифузійні, агресивні середовища тощо. У зв'язку з жорсткими експлуатаційними та економічними вимогами до таких інженерних систем актуальна проблема розробки розрахункових схем дослідження їх напружено-деформованого стану.

У процесі розробки й конструювання сучасних інженерних систем значна увага приділяється проблемі підвищення якості й надійності створюваних виробів. Це питання має комплексний характер і для всіх галузей народного господарства, тому його вирішення належить до першочергових завдань загальнодержавного значення.

Основна мета діагностики під час проектування нових машин і в період їх експлуатації, полягає у розробці методів і засобів вимірювання, за допомогою яких можна було б однозначно визначити технічний стан машин та механізмів і характер його зміни в часі. Аварійні ситуації на атомних електростанціях, залізничному, морському й авіаційному транспорті, газонафтопроводах, підземних комунікаціях та інших інженерних комплексах можуть бути значно зменшені або зведені до мінімуму, якщо ефективно застосовувати автоматизовану вимірювально-діагностичну техніку.

Одними з найефективніших видів технічної діагностики машин є теплова, термопружна та дифузійна діагностики, тобто діагностика за показниками всіх видів полів, які супроводжують процес експлуатації, оскільки теплота й температура, термопружні та дифузійні параметри є основними чинниками всіх без винятку механічних процесів – тертя, деформування, руйнування тощо.

Серед багатьох методів поверхневого зміцнення будівельних конструкцій різноманітного призначення: гідротехнічні споруди (порти, греблі), транспортне будівництво, у тому числі будівництво автомобільних доріг, аеродромів тощо, важливого значення набуває термічна обробка металів за допомогою дифузійного насичення шарів окремими хімічними елементами або їх комплексами, що має суттєвий вплив на їхні фізико-механічні характеристики [1–3]. Так, у результаті нерівномірного розподілу дифундуючих компонентів у деяких ділянках даної системи виникають концентраційні напруження, які в одних випадках сприяють підвищенню міцності елементів, а в інших – їх зниженню. Особливо шкідливими з точки зору порушення вимог експлуатації є виникнення технологічних розтягуючих напружень в конструкційних елементах, тому вивчення закономірностей розподілу концентраційних напружень – важливий момент у розрахунках конструктивних елементів.

Дослідження дифузії розчиненої речовини в неізотермічних умовах становить не лише теоретичну зацікавленість, але й має практичне застосування в конструюванні, наприклад, розподільчих колонок типу Клаузіуса–Діккеле [*4*, 128].

Постановка завдання. Мета – дослідити зміну концентраційних напружень у циліндричній оболонці товщиною $2h$ з низькою зсувною жорсткістю за наявності двох взаємопов'язаних фізичних процесів – дифузії речовини й поширення тепла, яка нагрівається шляхом конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем.

Результати дослідження. Приймаємо, що оболонка є двокомпонентним твердим розчином зі сталими початковими значеннями температури t_0 і концентрації розчиненої речовини c_0 . Температуру зовнішнього середовища t_c задамо у вигляді:

$$t_c = t_0 H(x), \tag{1}$$

що відповідає частковому зануренню оболонки в середовище зі сталою температурою. Залежності (1) зазначено: $H(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ 0, x < 0 \end{cases}$ – асиметрична функція Гевісайда [*5*, 696]. Інша частина зовнішньої поверхні оболонки вважається тепло- і масоізольованою. Беручи до уваги, що дифузійний процес у тілі зумовлений тільки нерівномірним нагріванням, що вказує на відсутність на поверхні потенціалу дифузійного масоперенесення, тобто $\mu_c = 0$, і час релаксації теплових процесів значно менший часу релаксації процесів, пов'язаних з дифузією речовини, то з наближенням, достатнім для адекватного опису процесів, можна виключити з розгляду перехідний період теплопередачі й розглядати задачу у квазістаціонарному припущенні. Знехтувавши при цьому також впливом деформації і концентрації на фізичні поля для визначення осесиметричного напруженого стану оболонки відповідно отримаємо [*6*, 221; *7*, 237] систему рівнянь і залежностей:

$$
\begin{gathered}
\left(\lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_1\right) T_1 = b_1 t_c, \\
\left(\Lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - d_1\right) C_1 + d_0 \left(\lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_1\right) T_1 = \frac{\partial c_1}{\partial \tau_0}, \\
\left(\frac{d^4}{d x^4} - 2q^2 \frac{d^2}{d x^2} + a^4\right) w = a^4 R \left(F_1^{t,c} - \frac{2q^2}{a^4} \frac{\partial^2 F_1^{t,c}}{\partial x^2}\right);
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$$
\begin{gathered}
N_2 = 2Eh\left(\frac{w}{R} - F_1^{t,c}\right), \\
Q_1 = -\frac{1}{h^3} D\left[\left(\frac{d^3}{d x^3} - 2q^2 \frac{d^2}{d x^2}\right) w + 2q^2 R \frac{\partial F_1^{t,c}}{\partial x}\right], \\
M_1 = -\frac{1}{h^2} D\left[\frac{d^2}{d x^2} - 2q^2 (w - R F_1^{t,c})\right].
\end{gathered}
\tag{3}
$$

У системі рівнянь (2) та залежностях (3) позначено: $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$; $\Lambda_0 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3}$; $a^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R^2}$; $2q^2 = \frac{E}{GR^2}$; $(T_1, C_1) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}(t, c)\,dz$; $b_1 = \frac{h}{2}(h_t^+ + h_t^-)$; $d_1 = \frac{h}{2}(h_\mu^+ + h_\mu^-)$; $F_1^{t,c} = \alpha_t T_1 + \alpha_c C_1$; $d_0 = \frac{d_t^0}{d_c^0}$, де $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ – жорсткість на згин; $x = \frac{\alpha}{h}$ – поздовжня координата оболонки; d_t^0, d_c^0 – коефіцієнти, що характеризують швидкість вирівнювання концентрації; $\lambda_1, \lambda_3, \Lambda_1, \Lambda_3$ – коефіцієнти теплопровідності і дифузії на серединній поверхні та площинах, перпендикулярних до неї відповідно; $h_t^\pm, h_\mu^\pm$ – відносні коефіцієнти тепло- й масообміну на поверхнях оболонки $z = \pm h$ відповідно; T_1, C_1 – усереднені характеристики температури й концентрації речовини; *ν* – коефіцієнт Пуассона; *E* – модуль Юнга; *G* – модуль зсуву в площинах, перпендикулярних до серединної поверхні; *w* – прогин оболонки радіусом *R*; α_t, α_c – температурний і концентраційний коефіцієнти лінійного розширення матеріалу; N_2, Q_1, M_1 – поздовжні й поперечні зусилля й момент відповідно [*8*, 22, 23]; $\tau_0 = \frac{\alpha_c \tau}{h^2}$; τ – час.

Розв'язок взаємозв'язаної системи (2) з урахуванням граничної умови (1) будуємо з використанням інтегральних перетворень Фур'є за поздовжньою координатою *x* та Лапласа за часом τ [9–12]. Виконавши необхідні перетворення і перейшовши до оригіналів, отримуємо вирази, що визначають температурний розподіл $T_1(x)$ і концентрацію розчиненої речовини $C_1(x, \tau_0)$, а також прогин оболонки *w*:

$$T_1(x)=1-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{m_1}x}, \tag{4}$$

$$C_1(x,\tau_0)=\frac{t_0 d_0 \lambda_0}{2\Lambda_0}\left[e^{-\sqrt{m_1}x}-2+\frac{1}{2}H_1(x,\tau_0)+e^{-m_2\tau_0}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\tau_0}}\right)\right]; \tag{5}$$

$$w=w_0(x)+w_1(x,\tau_0), \tag{6}$$

причому

$$w_0(x)=\frac{a^4 m_1 t_0 R}{2}\left\{\frac{2}{a^4 m_1}-\frac{1-\varepsilon_0 m_1}{p_1 m_1}e^{-\sqrt{m_1}x}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2rsa^4 p_1}e^{-rx}\left[rsm_1\cos sx+\left(a^4-m_1q^2\right)\sin sx\right]\right\},$$

$$w_1(x,\tau_0)=\frac{a^4 m_1 \alpha_c R}{2}\left\{\frac{1}{a^4 m_1}e^{-m_2\tau_0}\left(1+\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\tau_0}}\right)+\frac{1-\varepsilon_0 m_1}{p_1 m_1}H_2(x,\tau_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\tau_0\left(m_1+\frac{x^2}{4\tau_0^2}\right)}}{4rsa^4 p_1}\left[rsm_1\left(\varphi_1^+-\varphi_1^-\right)+\left(a^4-m_1q^2\right)\left(\varphi_2^+-\varphi_2^-\right)\right]\right\},$$

а у виразах (4)–(6) позначено:

$$m_1=h_t h;\ m_2=h_\mu h;\ p_1=m_1-2q^2 m_2+a^4;$$

$$\varepsilon_0=\frac{2q^2}{a^4};\ r=\sqrt{\frac{a^2-q^2}{2}};\ s=\sqrt{\frac{a^2+q^2}{2}};$$

$$H_{1,2}(x,\tau_0)=e^{-(m_2-m_1)\tau_0}\left\{e^{\sqrt{m_1}x}\left[1+\operatorname{erf}\left(\sqrt{m_1\tau_0}+\frac{x}{2\sqrt{\tau_0}}\right)\right]\mp\right.$$

$$\left.\mp e^{-\sqrt{m_1}x}\left[1+\operatorname{erf}\left(\sqrt{m_1\tau_0}-\frac{x}{2\sqrt{\tau_0}}\right)\right]\right\};$$

$erf(\cdot)$ – інтеграл імовірностей [9];

$\varphi_1^\pm$ і $\varphi_2^\pm$ – відомі подання [13] інтеграла ймовірностей від комплексного аргументу через табульовані інтеграли від дійсних функцій, а саме:

$$\varphi_1^\pm=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r+\frac{x}{2\tau_0}}{\left(\sqrt{\tau_0}-\eta\right)^2+\tau_0\left(r\pm\frac{x}{2\tau_0}\right)^2}e^{-\eta^2}d\eta;$$

$$\varphi_2^{\pm} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\sqrt{\tau_0} - \eta}{\left(\sqrt{\tau_0} - \eta\right)^2 + \tau_0\left(r \pm \frac{x}{2\tau_0}\right)^2} e^{-\eta^2} d\eta;$$

r, s – дійсні корені характеристичного рівняння $\xi^4 + 2q^2\xi^2 + a^4 = 0$, які залежать від співвідношення між коефіцієнтами a та q, що визначаються через геометричні й механічні параметри оболонки й можуть набувати як дійсних, так і комплексних значень ($a^2 > q^2$, $a^2 = q^2$, $a^2 < q^2$).

Зазначимо, що вирази (4)–(6) визначають відповідні поля для значення координати $x > 0$; щоб отримати вирази цих величин для значення $x < 0$, слід використати для їхнього запису функцію $\operatorname{sign} x = 2H(x) - 1 = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$

Підставивши вирази (4)–(6) у залежності (3) для зусиль і моментів, викликаних нерівномірним розподілом температури й концентрації розчиненої речовини, беручи до уваги умови неперервності переміщень, кутів повороту і напружень під час переходу через межу розділу дифундуючих фаз, знаходимо:

$$N_2 = N_2^0(x) + N_2'(x, \tau_0),$$

$$Q_1 = Q_1^0(x) + Q_1'(x, \tau_0),$$

$$M_1 = M_1^0(x) + M_1'(x, \tau_0),\ \tau_0 \to \infty. \quad (7)$$

Зауважимо, що величини $T_1(x)$, $w_0(x)$, $N_2^0(x)$, $Q_1^0(x)$, $M_1^0(x)$ в залежностях (4)–(7) є розв'язками відповідної стаціонарної задачі ($\tau_0 \to \infty$), а функції з індексом "штрих" у виразах (7) характеризують зміну в часі концентрації дифундуючої речовини, залишкових (концентраційних) зусиль і моментів. Зокрема, для поперечних зусиль у випадку $a^2 > q^2$ маємо такі вирази:

$$Q_1^0(x) = D\frac{a^4 m_1 t_0 R}{2p_1 h^3}\left\{\sqrt{m_1}e^{-\sqrt{m_1}x} + \frac{e^{-2x}}{2rs}\left[\left(m_1 + a^2\right)\cos sx + r\left(q^2 - m_1\right)\sin sx\right]\right\},$$

$$Q_1'(x, \tau_0) = -D\frac{a^4 m_1 \alpha_c R}{2p_1 h}\left\{\sqrt{m_1}H_2(x, \tau_0) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2rs}\left[\left(m_1 + a^2\right)\left(\varphi_1^+ + \varphi_1^-\right) + r\left(m_1 - a^2\right)\left(\varphi_2^+ + \varphi_2^-\right)\right]\right\}. \quad (8)$$

Аналогічно отримуємо вирази для інших (N_2, M_1) силових факторів, а також для решти випадків коренів характеристичного рівняння ($a^2 = q^2$, $a^2 < q^2$). Якщо в отриманих залежностях (5)–(8) $\tau_0 \to \infty$, $\alpha_c d_0 = 0$, $\Lambda_0 = 0$ дістаємо вирази, які збігаються з відповідними формулами, наведеними у праці [*14*, 223], а допускаючи $x > 0$, $a^2 < q^2$, $\lambda_0 = 1$, отримуємо результати, наведені у дослідженні [*8*, 123].

Згідно з отриманими залежностями (5), (8) (відповідають випадку коренів $a^2 > q^2$) проведено числові розрахунки, результати яких у вигляді графіків показано на рис. 1 (безрозмірну величину концентрації $C^* = C_1 / d_0 t_0$ розраховано для значень $\lambda_0 = 1$, $\Lambda_0 = 1$, $h_t^+ h = 1$) та рис. 2 (безрозмірні залишкові поперечні зусилля $Q^* = hQ_1 / D\alpha_c$), якщо значення параметрів $h / R = 1/16$; $\nu = 0{,}6$.

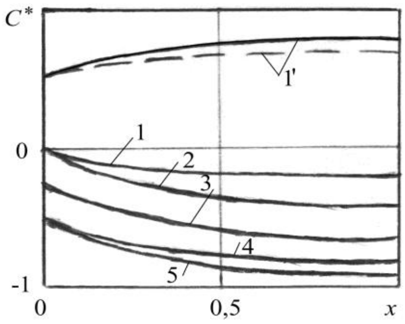

Рис. 1. Криві розподілу концентрації дифундуючої речовини і температури вздовж оболонки: криві 1 ($h_\mu^+ h = 0$), 3 ($h_\mu^+ h = 1$) побудовано для значень $\tau_0 = 0{,}6$, якщо $\lambda_0 = 1$, $\Lambda_0 = 1$; криві 2 ($h_\mu^+ h = 0$), 4 ($h_\mu^+ h = 1$) – відповідно для $\tau_0 = 10$; крива 5 характеризує вплив тепловіддачі ($h_t^+ h = 1$) у момент $\tau_0 = 10$

Порівняно на рис. 1 наведено криву, позначену як 1', що характеризує зміну по довжині оболонки безрозмірної температури $T_1^* = T_1 / t_0$, причому суцільна лінія відповідає значенням $\lambda_0 = 1$; $h_t^+ h = 0{,}1$; $h_\mu^+ h = 0{,}2$, а штрихова – $\lambda_0 = 0{,}5$; $h_t^+ h = 0{,}1$; $h_\mu^+ h = 0{,}5$.

Результати досліджень показують, що збільшення параметра λ_0 призводить до незначної зміни температури в оболонці; водночас розподіл залишкових зусиль в оболонці суттєво залежить від повного комплексу параметрів задачі: коефіцієнтів тепло- і масоперенесення, а також від трансверсальних механічних характеристик, для яких величина Q^* є стискаючою. Збільшення параметра зсувної податливості $\frac{E}{G}$ призводить до їх зменшення; за числовими розрахунками величини максимальних зусиль для значень $\frac{E}{G} = 0$ і $\frac{E}{G} = 2{,}6$ відрізняються приблизно на 13–15 %. Значення $\tau_0 = 10$ практично відповідає усталеному режиму концентрації речовини.

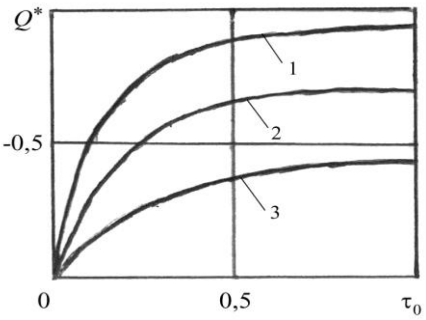

Рис. 2. Зміна поперечних зусиль у часі в перерізі $x = 0{,}2$: крива 1 – $\frac{E}{G} = 0$; крива 2 – $\frac{E}{G} = 2{,}6$; крива 3 – $\frac{E}{G} = 40$.

Висновки. Створено теоретичну базу для розрахунку параметрів оболонкових конструкцій транспортних систем, які працюють в умовах дії трьох взаємопов'язаних полів, обумовлених процесами теплопровідності, термопружності й дифузійного насичення. Отримано аналітичні залежності для кількісної оцінки параметрів, які дозволяють шляхом параметричної оптимізації обирати найраціональніші конструктивні схеми елементів конструкцій з метою їх упровадження в інженерну практику.

Числовий аналіз показав, що збільшення параметра, який характеризує відносну теплопровідність перпендикулярних шарів системи, призводить до незначної зміни температури в оболонці; водночас розподіл залишкових зусиль в оболонці суттєво залежить від повного комплексу параметрів задачі: коефіцієнтів тепло- й масоперенесення, а також від трансверсальних механічних характеристик.

Література

1. Андрейкив А. Е. Усталостное разрушение и долговечность конструкций / А. Е. Андрейкив, А. И. Дарчук. – К. : Наук. думка, 1992. – 184 с.

2. Сакара А. О. Визначення залишкової довговічності елементів металоконструкцій вантажопідіймальних машин / А. О. Сакара // Вісник Одеського національного морського університету : зб. наук. пр. – 2010. – № 27. – С. 147–156.

3. Тайра С. Теория высокотемпературной прочности материалов / С. Тайра, Р. Отани. – М. : Металлургия, 1986. – 280 с.

4. Лыков А. В. Теория тепломассопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М.–Л. : Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.

5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1975. – 831 с.

6. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – К. : Наук. думка, 1978. – 344 с.

7. Биргер И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения / И. А. Биргер. – М. : Оборонгиз, 1961. – 368 с.

8. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек / Пелех Б. Л. – Львов : Вища школа, 1978. – 160 с.

9. Галицын А. С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А. С. Галицын, А. Н. Жуковский. – К. : Наук. думка, 1976. – 282 с.

10. Снеддон И. Преобразования Фурье / Снеддон И. – М. : Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.

11. Гельфанд И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 470 с.

12. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1986. – 1108 с.

13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

14. Подстригач Я. С. К определению напряженного состояния тонких оболочек с учетом деформаций, обусловленных физико-химическими процессами / Я. С. Подстригач, В. А. Осадчук // Физико-химическая механика материалов. – 1968. – № 2. – С. 218–224.