№ 9(37) 2024
і Наука Техніка Сьогодні
серії: право, економіка, педагогіка, техніка, фізико-математичні науки

УДК 517.5

https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-9(37)-980-991

Щитов Олександр Миколайович кандидат фізико-математичних наук, доцент, викладач, НВК-Ліцей № 100, пл. Успенська, 1, м. Дніпро, 49044, тел.: (066) 336-29-81, https://orcid.org/0000-0002-1435-2918

Мормуль Микола Федорович кандидат технічних наук, доцент, доцент, Університет митної справи та фінансів, вул. Володимира Вернадського, 2/4, м. Дніпро, 49000, тел.:**(**098) 487-76-86, https://orcid.org/0000-0002-8036-3236

ОТРИМАННЯ ТОЧНОЇ КОНСТАНТИ В НЕРІВНОСТІ ТИПУ ДЖЕКСОНА ДЛЯ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ В ПРОСТОРІ S^p

Анотація. У статті знайдено точну константу в нерівності типу Джексона, яка зв'язує значення $e_{n-1}(f)_{S^p}$ найкращого наближення функцій тригонометричними поліномами з модулями неперервності m-го порядку в просторі S^p, при $1 \leq p < \infty$. В окремому випадку, коли $m = 1$, отримано результат, який у певному сенсі узагальнює результат, отриманий Л. В. Тайковим у просторі L_2 для довільних модулів неперервності m-го порядку ($m \in \mathrm{N}$). Доведено на практичному прикладі, що нерівність типу Джексона є потужним інструментом для оцінки точності апроксимацій у різних математичних і прикладних задачах, де важливо зрозуміти, наскільки добре певний апроксимаційний метод відтворює оригінальну функцію. Так, у теорії сигналів нерівність Джексона може бути використана для оцінки якості відновлення сигналу з його часткових або періодичних зразків, що є важливим у цифровій обробці сигналів. В чисельних методах вона допомагає оцінювати якість апроксимації функцій певного класу (наприклад, гладких функцій) тригонометричними поліномами, та визначати помилки наближення функцій або розв'язків диференціальних рівнянь, що важливо для розробки ефективних чисельних алгоритмів. А у теорії функцій допомагає досліджувати властивості функцій, аналізуючи їх модулі неперервності, що особливо корисно для функцій, які не є абсолютно гладкими, але все ж мають певні регулярні характеристики, тощо. Отримані результати мають значний вплив на теорію апроксимації функцій, оскільки вони дозволяють більш точно оцінити ефективність наближення функцій тригонометричними поліномами у просторі S^p. Це, в свою чергу, може бути корисним для подальших досліджень у чисельних методах, теорії сигналів та інших галузях, де використовуються методи апроксимації функцій.

Ключові слова: найкращі наближення, нерівність типу Джексона, тригонометричні поліноми, точна стала, модуль неперервності, простори S^p, простір L_2.

Shchytov Oleksandr Mykolayovych candidate of Physical and mathematical sciences, associate professor, teacher of EC-Lyceum No. 100, Sq. Uspenska, 1, Dnipro, 49044, tel.:(066) 336-29-81, https://orcid.org/0000-0002-1435-2918

Mormul Mykola Fedorovych candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the University of Customs and Finance, Dnipro, St. Volodymyr Vernadskyi, 2/4, 49000, tel.:(098) 487-76-86, https://orcid.org/0000-0002-8036-3236

JACKSON-TYPE INEQUALITY FOR OPTIMAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS IN THE SPACE S^p

Abstract. n the paper, the exact constant in the Jackson-type inequality is found, which relates the value $e_{n-1}(f)_{S^p}$ of the best approximation of functions by trigonometric polynomials to the moduli of continuity of *m*-th order in the space S^p, for 1 ≤ p< ∞. In the specific case when *m* = 1, the result generalizes, in a certain sense, the result obtained by L. V. Taykov in the space L_2 for arbitrary moduli of continuity of *m*-th order (*m* ∈ N).

The paper demonstrates, through practical examples, that Jackson-type inequalities are a powerful tool for assessing the accuracy of approximations in various mathematical and applied problems where it is crucial to understand how well a particular approximation method reproduces the original function. For instance, in signal theory, Jackson's inequality can be used to evaluate the quality of signal reconstruction from its partial or periodic samples, which is significant in digital signal processing. In numerical methods, it helps in evaluating the quality of approximations of functions in certain classes (e.g., smooth functions) by trigonometric polynomials and determining the errors in approximating functions or solving differential equations, which is important for developing effective numerical algorithms. In function theory, it aids in exploring the properties of functions by analyzing their moduli of continuity, which is particularly useful for functions that are not absolutely smooth but still possess certain regular characteristics.

The obtained results have a significant impact on the theory of function approximation as they allow for a more precise evaluation of the effectiveness of approximating functions by trigonometric polynomials in the space S^p. This, in turn, may be beneficial for further research in numerical methods, signal theory, and other fields where function approximation methods are employed.

Keywords: best approximations, Jackson-type inequality, trigonometric polynomials, sharp constant, modulus of continuity, S^p spaces, L_2 space.

Постановка проблеми. Нерівність типу Джексона є важливим інструментом в теорії апроксимації, і її застосування охоплює кілька ключових областей.

1. **Апроксимація функцій**: нерівність типу Джексона використовується для оцінки якості апроксимації функцій певного класу (наприклад, гладких функцій) тригонометричними поліномами. Вона дозволяє визначити, наскільки близько можна наблизити функцію до її найкращого апроксимаційного полінома.

2. **Теорія функцій**: у теорії функцій нерівність типу Джексона допомагає вивчати властивості функцій на основі їх модуля неперервності. Це корисно при аналізі функцій, які не є гладкими, але мають певні регулярні властивості.

3. **Аналіз в просторах Лебега та Соболєва**: нерівності типу Джексона застосовуються для оцінки точності наближення функцій в різних просторах, таких як простори L_{p}. і W_p^k, де L_{p}. є простором Лебега, а W_p^k – простором Соболєва.

4. **Чисельні методи та обчислювальна математика**: в чисельних методах нерівність типу Джексона дозволяє оцінювати, наскільки точно наближені функції або розв'язки диференціальних рівнянь, що є важливим для створення ефективних чисельних алгоритмів.

5. **Теорія сигналів і обробка сигналів**: у теорії сигналів ця нерівність допомагає визначити, наскільки добре відновлено сигнал з часткових або періодичних зразків, що критично для цифрової обробки сигналів.

Метою дослідження є отримання точної константи в нерівності типу Джексона між значенням найкращого наближення функцій з класу $L_{\beta}^{\Psi}(S^p)$ тригонометричними поліномами $e_{n-1}(f)_{S^p}$ та модулями неперервності m-го порядку $\omega_m(f_{\beta}^{\Psi}, t)_{S^p}$ у просторі S^p $(1 \leq p < \infty)$.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети використані наступні методи.

1. Аналітичний метод: аналіз модуля неперервності та його зв'язку з апроксимацією функцій тригонометричними поліномами, а також використання відомих результатів і теорем для оцінки модуля неперервності у просторі S^p.

2. Метод апроксимації: аналіз властивостей та конструкцій тригонометричних поліномів ступеня $n-1$ для оцінки їхньої здатності до апроксимації; дослідження точності апроксимації функцій цими поліномами у просторі S^p; розгляд класичних нерівностей типу Джексона та їх узагальнень.

№ 9(37) 2024
іНАУКА ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
серії: право, економіка, педагогіка, техніка, фізико-математичні науки

3. Методи оптимізації: застосування методів оптимізації для пошуку найменшої константи у нерівності типу Джексона.

4. Інструменти функціонального аналізу: використання інструментів функціонального аналізу для дослідження властивостей функцій у просторах S^p; застосування теорії апроксимації в нормованих просторах для встановлення точних констант.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Тригонометричні поліноми вивчаються вже протягом тривалого часу. Інтенсивне дослідження їх властивостей апроксимації розпочалося після видатного результату Вейєрштраса. Значні результати в теорії апроксимації були отримані Джексоном. Він довів, що для будь-якої довільної 2π-періодичної неперервної функції виконується така нерівність

$$e_{n-1}(f)_C \leq K\omega\left(f;\frac{1}{n}\right),$$

де

$$e_{n-1}(f)_C = \inf\{\|f - T_{n-1}\|_C\colon\ T_{n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}\}$$

є значення найкращого наближення функції f до підпростору $\mathcal{L}_{n-1}$ тригонометричних поліномів степені $n-1$ у метриці неперервності;

$$\omega(f;t)\text{=}\sup\{\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_C\colon\ |h| \leq t\}$$

є модуль неперервності функції f, а K – це константа, яка не залежить від n та f. Ця нерівність та аналогічні їй відомі в теорії апроксимації як нерівності типу Джексона. В теорії апроксимації важливо знайти найменшу константу серед усіх можливих у нерівностях типу Джексона. Такі константи називаються точними константами. Нерівності типу Джексона з точними константами називаються точними нерівностями.

Питання отримання нерівностей типу Джексона у випадку апроксимації тригонометричними поліномами в рівномірних та інтегральних метриках вивчали багато математиків, див., наприклад, статті [1]-[10].

Багато статей присвячено розв'язанню задач теорії апроксимації в просторах S^p $(1 \leq p < \infty)$. Наприклад, у статтях [11]-[13] досліджувалися властивості апроксимації тригонометричної системи та розв'язано кілька задач отримання нерівностей типу Джексона:

$$e_{n-1}(f)_{S^p} \leq \chi(t)\cdot n^{-r}\omega_m\left(f^{(r)};\frac{t}{n}\right)_{S^p} \qquad (t>0)$$

та знаходження точних констант для фіксованих значень m, n, t і p, тобто значень

$$\chi_{m,n}(t)_{S^p} = \sup\left\{\frac{e_{n-1}(f)_{S^p}}{\omega_m\left(f;\frac{t}{n}\right)_{S^p}}\colon\ f \in L^r(S^p),\ \ f \neq const\right\} \quad (t<0).$$

Ми припускаємо, що відношення 0/0 дорівнює нулю.

У статті [14] були отримані точні значення екстремальних характеристик особливої форми між значеннями найкращих поліноміальних апроксимацій функцій $e_{n-1}(f)_{S^p}$ та модулями неперервності m-го порядку $\omega_m(f_{\beta}^{\Psi}, t)_{S^p}$.

Виклад основного матеріалу. А. І. Степанець у [11] ввів нормовані простори $S^p, 1 \leq p < \infty$, для інтегровних функцій $f(x)$, що мають період 2π, для яких

$$\|f\|_{S^p} = \left\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(k)\right|^p\right\}^{1/p} < \infty,$$

де Z

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \qquad (1)$$

є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$ по тригонометричній системі $(2\pi)^{-1/2} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$. Було доведено, що простори $S^p, 1 \leq p < \infty$ мають суттєві властивості гільбертівських просторів, тобто мінімальну властивість частинних сум Фур'є. Якщо

$$e_{n-1}(f)_{S^p} = \inf\{\|f - T_{n-1}\|_{S^p}:\ T_{n-1} \in \mathcal{L}_{n-1}\}$$

є значенням найкращого наближення функції $f(x) \in S^p$ до підпростору $\mathcal{L}_{n-1}$ тригонометричних поліномів степені $n-1$ у метриці простору S^p, тоді

$$e_{n-1}(f)_{S^p} = \|f - s_{n-1}(f)\|_{S^p} = \left\{\sum_{|k| \geq n} \left|\hat{f}(k)\right|^p\right\}^{1/p}, \qquad (2)$$

де

$$s_{n-1}(f, x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{|k| \leq n-1} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

є частинною сумою ряду Фур'є

$$s_{n-1}(f, x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

функції $f(x) \in S^p$.

А. І. Степанець зазначає в [11], що для $p = 2$ виконується рівність

$$\|f\|_{L_2} = \|f\|_{S^2} .$$

Нехай

$\omega_m(f; t)_X = \sup\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_X:\ 0 < h \leq t\}$, (3)

є модулем неперервності m-го порядку функції $f(x) \in X$, де

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh)$$

є кінцевою різницею m-го порядку функції $f(x$ в точці x з кроком h. Якщо $X = L_p$ $(1 \le p < \infty)$, то значення $\omega_m(f;t)_{L_p}$ є відомим інтегральним модулем неперервності. У випадку $X = S^p$ модуль неперервності $\omega_m(f;t)_{S^p}$ був введений у статті [13].

Нехай $\Psi(k)$ і $\beta(k) = \beta_k$ $(k \in \mathbb{N})$ є обмеженнями на $\mathbb{N}$ для довільних функцій $\Psi(x)$ та $\beta(x)$, визначених на півінтервалі $[1,\infty)$. Припустимо, що серія

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta_k\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої умовної функції, яку ми позначаємо як $f_{\bar\beta}^{\Psi}(x)$. Функція $f_{\bar\beta}^{\Psi}(x)$ називається $(\Psi,\bar\beta)$-похідною функції $f(x)$. Концепція $(\Psi,\bar\beta)$-похідної є узагальненням визначення r-ї похідної функції. Коли $\Psi(k) = k^{-r}$ $(0 < r < \infty)$ і $\beta(k) = r$, то r-та похідна функції $f(x)$ відрізняється від (k^{-r}, r)-похідної лише на константу.

Нехай $L_{\bar\beta}^{\Psi}$ – це множина інтегровних функцій $f(x)$, що мають період 2π і мають $(\Psi,\bar\beta)$-похідні.

Також нехай $L_{\bar\beta}^{\Psi}(S^p)$ – це множина функцій $f(x) \in L_{\bar\beta}^{\Psi}$, для яких їх $(\Psi,\bar\beta)$-похідні належать простору S^p.

Якщо $\Psi(k) = k^{-r}$ $(0 < r < \infty)$ і $\beta(k) = r$, тоді ми використовуватимо позначення $L^r(S^p)$; $L_2^r \equiv L^r(S^2)$.

Визначимо таке позначення

$$\chi_{n,(\Psi,\bar\beta),m,p,l}(\mathcal{F},t;S^p) = \sup_{\substack{f(x)\in L_{\bar\beta}^{\Psi}(S^p)\\ f(x)\neq const}} \frac{n^{-l}e_{n-1}(f)_{S^p}}{\Psi(n)\left(\int_0^t \omega_m^p(f_{\bar\beta}^{\Psi},x)_{S^p}\mathcal{F}(x)dx\right)^{1/p}}. \qquad (4)$$

У просторі S^p значення типу (4) досліджувалися

А. І. Степанцем та А. С. Сердюком [11], [12] $\left(\chi_{n,(1,0),m,p,1/p}\left(\mathcal{F},\frac{\pi}{n};S^p\right), \mathcal{F}(x) = \sin(nx)\right)$,

А. С. Сердюком [12] $\left(\chi_{n,(\Psi,\mathrm{r}),m,p,1/p}\left(\mathcal{F},\frac{\pi}{n};S^p\right),\ \mathcal{F}(x) = \sin(nx)\right)$, $\left(\chi_{n,(\Psi,\mathrm{r}),m,p,1}(\mathcal{F},t;S^p),\ \mathcal{F}(x) = 1,\ 0 < t \le \frac{3\pi}{4}\right)$.

Значення, аналогічні (4), розглядалися В. П. Войцеховським [14], С. В. Вакарчуком [8] $\left(\chi_{n,(\Psi,\bar\beta),m,p,0}(\mathcal{F},t;S^p),\ \ \mathcal{F}(x) = 1,\ 0 < t \le \frac{\pi}{n}\right)$ та О. М. Щитовим [16].

Асимптотично точні нерівності типу Джексона між значеннями $e_{n-1}(f)_{S^p}$ та модулями неперервності функцій $f(x) \in S^p$ були знайдені у статті [15].

Далі ми припускаємо, що функція $\Psi(x)$ $(1 \le x < \infty)$ є додатною функцією, яка монотонно зменшується до нуля зі збільшенням x.

Точна константа в нерівності типу Джексона для найкращого наближення функцій у просторі S^p тригонометричними поліномами наведена в наступній теоремі.

Теорема 1. Для довільних $n, m \in \mathbb{N}, 0 < \tau \le \frac{3\pi}{4n}$ і $1 \le p < \infty$ виконується наступна рівність

$$\sup_{\substack{f(x) \in L_\beta^\Psi(S^p) \\ f(x) \neq const}} \frac{e_{n-1}(f)_{S^p}}{\left(\int_0^\tau \omega_m^{2/m}(f_\beta^\Psi, h)_{S^p} dh\right)^{m/2}} = \Psi(\mathrm{n}) \left\{\frac{n}{2(n\tau - \sin n\tau)}\right\}^{\frac{m}{2}}. \quad (5)$$

Доведення. Використовуючи наступні результати

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx\,;$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx \qquad (k \in \mathbb{Z}_+), \quad (6)$$

можемо записати коефіцієнти Фур'є (1) у вигляді

$$\hat{f}(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(a_{|k|}(f) - i b_{|k|}(f) \operatorname{sgn} k\right) \quad (k \in \mathbb{Z}_+).$$

Тоді зв'язок (2) можна записати у наступному вигляді

$$e_{n-1}(f)_{S^p} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left\{2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f)\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (7)$$

де

$$\rho_k(f) = \sqrt{a_k^2(f) + b_k^2(f)}.$$

Як відомо з [12], коефіцієнти Фур'є функцій $f(x)$ і $f_\beta^\Psi(x)$ пов'язані формулами

$$\begin{cases} a_k(f) = \Psi(k)\left(a_k\left(f_\beta^\Psi\right)\cos\frac{\beta_k\pi}{2} - b_k\left(f_\beta^\Psi\right)\sin\frac{\beta_k\pi}{2}\right), \\ b_k(f) = \Psi(k)\left(a_k\left(f_\beta^\Psi\right)\sin\frac{\beta_k\pi}{2} + b_k\left(f_\beta^\Psi\right)\cos\frac{\beta_k\pi}{2}\right). \end{cases} \quad (8)$$

З рівнянь (6) та (8) маємо

$$\hat{f}(k) = e^{-i\beta_k\pi \operatorname{sgn}(k)/2}\, \Psi(|k|)\, \widehat{f_\beta^\Psi}(k) \;\; (k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}). \quad (9)$$

У статті [28] показано, що для довільної функції $f(x) \in S^p$ $(1 \le p < \infty)$

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{S^p}^p = 2^{mp/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(k)\right|^p (1 - \cos kh)^{mp/2}. \quad (10)$$

Використовуючи (6) та (10), можемо записати

$$\left\|\Delta_h^m f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(\cdot)\right\|_{S^p}^p = \pi^{p/2} 2^{1+(m-1)p/2} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^p\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right)(1-\cos kh)^{mp/2}. \qquad (11)$$

З формули (9) випливає наступне рівняння:

$$\rho_k(f) = \Psi(\mathrm{k})\rho_k\left(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}\right).$$

Тоді, використовуючи останнє рівняння з (11), маємо

$$\left\|\Delta_h^m f_{\overline{\beta}}^{\Psi}(\cdot)\right\|_{S^p}^p = \pi^{p/2} 2^{1+(m-1)p/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Psi^p(\mathrm{k})} \rho_k^p(f)(1-\cos kh)^{mp/2}. \qquad (12)$$

Використовуючи формулу (7), запишемо

$$e_{n-1}(f)_{S^p} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p/2} 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f)\cos kh =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p/2} 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{p-\frac{2}{m}}(f)\,\rho_k^{\frac{2}{m}}(f)(1-\cos kh). \qquad (13)$$

Застосувавши нерівність Гьольдера до правої частини рівняння (13), використовуючи (2) та (12), визначення модуля неперервності m-го порядку та зменшувальний характер функції $\Psi(x)$, з рівняння (13) отримуємо

$$e_{n-1}(f)_{S^p} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p/2} 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f)\cos kh \le$$

$$\le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{p}{2}} 2\left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f)\right\}^{1-2/mp} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f)(1-\cos kh)^{mp/2}\right\}^{2/mp} \le$$

$$\le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{m}} \Psi^{\frac{2}{m}}(n)\, e_{n-1}^{\,p-2/m}(f)_{S^p} \left\{2\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\Psi^p(\mathrm{k})} \rho_k^p(f)(1-\cos kh)^{mp/2}\right\}^{2/mp} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\, \Psi^{\frac{2}{m}}(n)\, e_{n-1}^{\,p-\frac{2}{m}}(f)_{S^p}\, \omega_m^{\frac{2}{m}}(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}, h)_{S^p}. \qquad (14)$$

Інтегруючи рівняння (14) по змінній h в межах від 0 до τ, дістаємо

$$\tau\, e_{n-1}^{\,p}(f)_{S^p} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{p}{2}} 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f)\frac{\sin k\tau}{k} +$$

$$+ \frac{\Psi^{\frac{2}{m}}(n)}{2}\, e_{n-1}^{\,p-\frac{2}{m}}(f)_{S^p} \int_0^{\tau} \omega_m^{\frac{2}{m}}(f_{\overline{\beta}}^{\Psi}, h)_{S^p}\, dh. \qquad (15)$$

У [3] було отримано рівняння

$$\max_{n\tau\le u}\left|\frac{\sin u}{u}\right| = \frac{\sin n\tau}{n\tau} \qquad \left(0 < n\tau \le \frac{3\pi}{4}\right), \qquad (16)$$

Розділивши нерівність (16) на τ і враховуючи (7) та (16), отримуємо

$$e_{n-1}^{\,p}(f)_{S^p} \le \frac{\sin n\tau}{n\tau}\, e_{n-1}^{\,p}(f)_{S^p} +$$
$$+\frac{\Psi^{\frac{2}{m}}(n)}{2}\, e_{n-1}^{\,p-\frac{2}{m}}(f)_{S^p} \int_0^{\tau} \omega_m^{\frac{2}{m}}(f_{\bar\beta}^{\Psi}, h)_{S^p}\, dh. \tag{17}$$

Отже, з рівняння (17) одержуємо нерівність

$$e_{n-1}(f)_{S^p} \le \Psi(\mathrm{n}) \left\{\frac{n}{n\tau - \sin n\tau}\right\}^{m/2} \left(\int_0^{\tau} \omega_m^{2/m}(f_{\bar\beta}^{\Psi}, h)_{S^p} dh\right)^{m/2}. \tag{18}$$

З рівняння (18) для довільного $0 < \tau \le \frac{3\pi}{4n}$ ми отримуємо верхню межу

$$\sup_{\substack{f(x)\in L_{\bar\beta}^{\Psi}(S^p)\\ f(x)\neq const}} \frac{e_{n-1}(f)_{S^p}}{\left(\int_0^{\tau} \omega_m^{2/m}(f_{\bar\beta}^{\Psi}, h)_{S^p} dh\right)^{m/2}} \le \Psi(\mathrm{n}) \left\{\frac{n}{2(n\tau - \sin n\tau)}\right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{19}$$

Щоб отримати нижню межу, розглянемо функцію

$$\tilde f(x) = \sqrt{2/\pi}\ \cos(nx),$$

яка належить до класу $L_{\bar\beta}^{\Psi}(S^p)$.

На основі (7) маємо

$$e_{n-1}(\tilde f)_{S^p} = 2^{1/p}. \tag{20}$$

Для $(\Psi, \bar\beta)$-похідної функції $\tilde f$

$$\tilde f_{\bar\beta}^{\Psi}(x) = \sqrt{2/\pi}\, \Psi^{-1}(\mathrm{n})\ \cos(nx + \beta_k \pi/2).$$

Згідно з формулою (11) та визначенням модуля неперервності m-го порядку для $0 < t \le \frac{\pi}{n}$ можемо записати

$$\omega_m(\tilde f_{\bar\beta}^{\Psi}, h)_{S^p} = 2^{\frac{1}{p}+\frac{m}{2}} \frac{1}{\Psi(\mathrm{n})}\ (1 - \cos nt)^{\frac{m}{2}}, \tag{21}$$

З (21) для $0 < t \le \frac{\pi}{n}$ отримуємо

$$\left\{\int_0^{\tau} \omega_m^{2/m}(\tilde f_{\bar\beta}^{\Psi}, h)_{S^p} dh\right\}^{m/2} = \frac{1}{\Psi(\mathrm{n})}\ 2^{\frac{1}{p}+\frac{m}{2}} \left(\tau - \frac{1}{n}\sin n\tau\right)^{\frac{m}{2}}. \tag{22}$$

Тоді, враховуючи (20) та (22), остаточно одержимо

$$\sup_{\substack{f(x)\in L_{\bar\beta}^{\Psi}(S^p)\\ f(x)\neq const}} \frac{e_{n-1}(f)_{S^p}}{\left(\int_0^{\tau} \omega_m^{2/m}(f_{\bar\beta}^{\Psi}, h)_{S^p} dh\right)^{m/2}} \ge \frac{e_{n-1}(\tilde f)_{S^p}}{\left(\int_0^{\tau} \omega_m^{\frac{2}{m}}(\tilde f_{\bar\beta}^{\Psi}, h)_{S^p} dh\right)^{\frac{m}{2}}} =$$
$$= \Psi(\mathrm{n}) \left\{\frac{n}{2(n\tau - \sin n\tau)}\right\}^{\frac{m}{2}}. \tag{23}$$

З верхньої межі (19) та нижньої межі (23) випливає рівність (5). Теорема 1 доведена.

Якщо $\Psi(\mathrm{n}) = n^{-r},\ r \in \mathbb{Z}_+,$ то з теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 2. Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$ і $n, m \in \mathbb{N}$. Тоді для довільного $0 < \tau \leq \frac{3\pi}{4n}$ виконується рівність

$$\sup_{\substack{f(x)\in L_2^r \\ f(x)\neq const}} \frac{n^r\ e_{n-1}(f)_{L_2}}{\left(\int_0^\tau \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h)_{L_2} dh\right)^{m/2}} = \left\{\frac{n}{2(n\tau - \sin n\tau)}\right\}^{\frac{m}{2}}.$$

Результат Теореми 2 у певному сенсі узагальнює результат, отриманий Л. В. Тайковим для випадку $m = 1$ у статті [2] для довільного модуля неперервності m-го порядку $(m \in \mathbb{N})$.

Висновки. Для функцій з класу $L_\beta^\Psi(S^p)$ $(1 \leq p < \infty)$ була знайдена точна константа в нерівності типу Джексона між значенням найкращого наближення $e_{n-1}(f)_{S^p}$ функцій тригонометричними поліномами та модулями неперервності m-го порядку $\omega_m(f_\beta^\Psi, h)_{S^p}$ у просторі S^p. З отриманого результату випливає твердження, яке в певному сенсі узагальнює результат, отриманий Л. В. Тайковим для $m = 1$ у просторі L_2 для довільного модуля неперервності m-го порядку $\omega_m(f^{(r)}, h)_{L_2}$ $m \in \mathbb{N}$. Отриманий результат може бути використаний в теорії сигналів для оцінки якості відновлення сигналу з його часткових або періодичних зразків.

Література:

1. Черных И. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки, 2, № 2 1967, с. 513–522.

2. Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки, 20, № 3 1976, с. 433–438.

3. Тайков, Л. В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки, 25, № 2 1979, с. 217–223.

4. Юссеф Х. Поперечники классов функций в пространстве L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. науч. тр. Калинин. гос. ун-та, 1990, с. 167–175.

5. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн., 43, № 1 1991, с. 125–129.

6. Вакарчук С. Б. Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2 // Укр. мат. журн., 68, № 6 2016, с. 723–745.

7. Бабенко В. Ф., Конарева С. В. Неравенства типа Джексона – Стечкина для аппроксимации элементов гильбертова пространства // Укр. мат. журн., 70, № 9 2018, с. 1155–1165.

8. Вакарчук С. Б., Щитов А. Н. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций в пространствах L_2 // Укр. мат. журн., 57, № 11 2005, с. 1458–1466.

9. Shabozov M. Sh., YusupovG. A. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2 // Mathematical Journal. 52(6) 2011, p. 124-1136.

10. Abdullayev F. G., Özkartepe P., Savchuk V. V., Shidlich A. L., Exact constants in direct and inverse approximation theorems for functions of several variables in the spaces S^p // Filomat. 33(5) 2019, p. 1471-1484.

11. Степанец А. И., Сердюк А. С. Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн., 54, № 1 2002, с. 106–124.

12. Сердюк А. С. Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності // Праці Ін-ту математики НАН України, № 46 2003, с. 229 – 248.

13. Войцехівський В. Р. Нерівності типу Джексона в просторі S^p // Український математичний журнал, № 55(9) 2003, с. 1410-1422.

14. Shchitov A. N. On best polynomial approximations in the spaces S^p and widths of some classes of functions // International Journal of Advanced Research in Mathematics. No. 7 2016, c. 19-32.

15. Vakarchuk S. B., Shchitov A. N. On some extremal problems in the theory of approximation of functions in the spaces S^p, $1 \le p \le \infty$ // Ukrainian Mathematical Journal. No. 58(3) 2006, c. 340-356.

References:

1. Chernykh, N. I. (1967). O nailuchshem priblizhenii periodicheskikh funktsii trigonometricheskimi polinomami v L_2 [Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2]. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 2(5), 803-808.

2. Taikov, L. V. (1976). Neravenstva, soderzhashchie nailuchshie priblizheniya i modul neprerivnosti funktsii iz L_2 [Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2]. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 20(3), 433–438.

3. Taikov, L. V. (1979). Strukturnie i konstruktivnie kharakteristiki funktsii iz L_2 [Structural and constructive characteristics of functions in L_2], *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 25(2), 217–223.

4. Yussef, Kh. (1988). Poperechniki klassov funktsii v prostranstve L_2 [On the best approximation of the functions and values of widths of classes of functions in L_2]. *Collection of the Scientific Works "Application of Functional Analysis to the Theory of Approximations"*. Kalinin, USSR, 100-114.

5. Shalaev, V. V. (1991). O poperechnikakh v L_2 klassov differentsiruemikh funktsii, opredelyaemikh modulyami neprerivnosti visshikh poryadkov [Widths in L_2 of classes of differentiable functions, defined by higher-order moduli of continuity]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 43(1), 125-129.

6. Vakarchuk, S. B. (2016). Neravenstva tipa Dzheksona s obobshchennim modulem neprerivnosti i tochnie znacheniya *n*-poperechnikov klassov (ψ, β)-differentsiruemikh funktsii v L_2 [Inequalities of the Jackson type with the generalized modulus of continuity and the exact values of the *n*-crossbars of the classes of (ψ, β)-differentiable functions in L_2]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68, 6, 723–745.

7. Babenko, G. (2001). Neravenstva typa Dzheksona – Stechkyna dlia approksymatsyy эlementov hylbertova prostranstva [On the Jackson-Stechkin inequality for the best L_2 -approximations of functions by trigonometric polynomials]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70, 9, 1155-1165.

8. Vakarchuk, S. B., Shchitov, A. N. (2005). O nekotorikh ekstremalnikh zadachakh teorii approksimatsii funktsii v prostranstvakh L_2 [On some extremal problems of the theory of approximation of functions in spaces]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57, 11, 1458–1466.

9. Shabozov, M. Sh., Yusupov, G. A. (2011). Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2. *Mathematical Journal*, 52(6), 1124-1136 [in English].

10. Abdullayev, F. G., Özkartepe, P., Savchuk, V. V., Shidlich, A. L. (2019). Exact constants in direct and inverse approximation theorems for functions of several variables in the spaces S^p. *Filomat*, 33(5), 1471-1484 [in English].

11. Stepanets, A. I., Serdyuk, A. S. (2002). Pryamie i obratnie teoremi priblizheniya funktsii v prostranstve S^p [Direct and inverse theorems in the theory of approximation of functions in the space S^p]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 54(1), 126-148.

12. Serdyuk, A. S. (2003). Poperechniki v prostori S^p klasiv funktsii, shcho oznachayutsya modulyami neperervnosti [Widths in the space S^p of classes of functions defined by moduli of continuity]. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the Ukrainian National Academy of Sciences "Extremal Problems of the Theory of Functions and Related Problems*", vol. 46, Kyiv, 229-248 [in Ukrainian].

13. Voitsekhivs'kyi V. R. (2003). Nerivnosti tipu Dzheksona v prostori S^p [Jackson-Type inequalities in the space S^p]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 55(9), 1410-1422 [in Ukrainian].

14. Shchitov, A. N. (2016). On best polynomial approximations in the spaces S^p and widths of some classes of functions. *International Journal of Advanced Research in Mathematics*, 7, 19-32 [in English].

15. Vakarchuk, S. B., Shchitov, A. N. (2006). On some extremal problems in the theory of approximation of functions in the spaces S^p, $1 \leq p < \infty$. *Ukrainian Mathematical Journal*, 58(3), 340-356 [in English].