МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Дніпропетровська державна фінансова академія

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчально-методичний посібник

Дніпропетровськ – 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДНІПРОПЕТРОВСЬКА ДЕРЖАВНА ФІНАНСОВА АКАДЕМІЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ В ЕКОНОМІЦІ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчально-методичний посібник
для слухачів, які навчаються
за освітньо-кваліфікаційним рівнем «спеціаліст»
у галузі знань 0305 “Економіка та підприємництво”
за спеціальністю 7.03050801 “Фінанси і кредит”

Дніпропетровськ-2012

УДК 338:519
ББК 22.1
Р 98

Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчально-методичний посібник для слухачів, які навчаються за освітньо-кваліфікаційним рівнем «спеціаліст» у галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво" за спеціальністю 7.03050801 "Фінанси і кредит": - Дніпропетровськ, Дніпропетровська державна фінансова академія, 2012.- 106 с.

Автор (укладач): О.А. Рядно - д.т.н., професор, завідувач кафедри математичного моделювання та інформаційних систем в економіці Дніпропетровської державної фінансової академії

Рецензенти: Т.А. Чупілко - к.т.н., доцент кафедри математичного моделювання та інформаційних систем в економіці Дніпропетровської державної фінансової академії

Б.Г.Пелешенко - к.ф.-м.н, професор кафедри вищої математики Дніпропетровського аграрного університету

Відповідальний за випуск: О А. Рядно - д.т.н., професор, завідувач кафедри математичного моделювання та інформаційних систем в економіці Дніпропетровської державної фінансової академії

Обговорено і схвалено
вченою радою економічного
факультету
Протокол № 7 від 22.06 2012р.

Розглянуто та схвалено на
засіданні кафедри математичного
моделювання та інформаційних
систем в економіці
Протокол № 11 від 11.06 2012 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Теорія ймовірностей та математична статистика” вивчається слухачами заочної форми навчання на І курсі і відноситься до циклу дисциплін природниче – наукової та загальнокономічної підготовки.

Мета дисципліни: формування базових знань з основ застосування ймовірнісно-статистичного апарата.

Завдання: вивчення закономірностей окремого випадкового явища та масових випадкових явищ, прогнозування їх характеристик.

Предмет навчальної дисципліни: кількісні та якісні методи аналізу закономірностей еволюції систем прикладного напряму, що розвиваються в умовах стохастичної невизначеності.

Вивчення дисципліни дає основу для опанування можливостей використання теорії ймовірностей та математичної статистики в спеціальних методах вивчення та аналізу інформації з питань економіки і менеджменту.

Навчальний курс “Теорії ймовірностей та математичної статистики” орієнтований на те, щоб в результаті його засвоєння:

- сформувати у слухача фундамент сучасної математичної культури;
- забезпечити стійкі навички дослідження та розв’язку загально математичних задач, а також задач економічного спрямування.

Навчання проводиться у формі лекцій, практичних занять, а також самостійної та індивідуальної роботи слухачів над програмним матеріалом.

Передбачена одна домашня контрольна робота.

Формою контролю по завершені курсу є диференційований залік.

1. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета: формування базових знань з основ застосування ймовірносно-статистичного апарата.

Компетенції, які необхідно сформувати в результаті вивчення навчальної дисципліни:

Інструментальні:

- здатність розуміти основні поняття теорії імовірностей та математичної статистики;
- здатність опановувати теоретичні засади математичного апарату, закони, що діють у сфері масових випадкових подій та явищ, методи систематизації, опрацювання і аналізу масових статистичних даних;
- здатність розв’язувати задачі теорії імовірностей та математичної статистики та здійснювати оцінку отриманих результатів;
- здатність розуміти можливість застосування математичних методів систематизації, опрацювання та застосування статистичних даних для наукових і практичних висновків в сфері економіки;
- здатність застосовувати теоретичні знання і практичні навички при вивченні навчальних дисциплін, пов’язаних з математичним моделюванням в економіці.

Міжособистісні:

- здатність працювати у команді,
- здатність брати соціальні та етичні зобов'язання при прийнятті рішень.

Системні:

- здатність застосовувати знання на практиці;
- здатність за допомогою математичних методів досліджувати та моделювати економічні процеси;
- здатність обґрунтовувати застосування вибраних методів для розв’язування економічних задач;
- здатність отримувати нові знання;
- прагнення до успіху.

Спеціальні:

- здатність доцільно використовувати математичні методи і моделі для ефективної діяльності у галузі економіки та підприємництва;
- здатність проводити аналіз економічних явищ за допомогою математичних методів та моделей;
- здатність демонструвати творчий підхід у дослідженні економічних задач за допомогою обраних математичних методів та моделей.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назва теми
Тема 1. Основні поняття і теореми теорії ймовірностей
Тема 2. Основні формули теорії ймовірностей, повторні незалежні випробування
Тема 3. Випадкові величини
Тема 4. Числові характеристики випадкових величин
Тема 5. Закон великих чисел
Тема 6. Граничні теореми
Тема 7. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини
Тема 8. Основні закони розподілу випадкової величини
Тема 9. Багатовимірні випадкові величини
Тема 10. Елементи математичної статистики. Вибірковий метод
Тема 11. Статистичні оцінки параметрів розподілу
Тема 12. Елементи теорії кореляції
Тема 13. Статистична перевірка статистичних гіпотез
Тема 14. Елементи дисперсійного аналізу
Тема 15. Елементи регресійного аналізу
Тема 16. Елементи теорії випадкових процесів і теорії масового обслуговування
Підсумковий контроль: диференційований залік

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Основні поняття і теореми теорії ймовірностей

Предмет курсу, його зміст. Класифікація подій: можливі, вірогідні та випадкові. Операції над подіями. Класичне і статистичне визначення ймовірностей випадкової події.

Поняття залежних і незалежних випадкових подій. Умовна ймовірність. Теореми добутку й додавання ймовірностей. Наслідки із теорем.

Тема 2. Основні формули теорії ймовірностей, повторні незалежні випробування

Формула повної ймовірності та формули Байєса.

Визначення повторних незалежних випробувань. Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра – Лапласа. Формула Пуассона.

Тема 3. Випадкові величини

Визначення випадкової величини. Економічна інтерпретація випадкових величин. Дискретні та неперервні випадкові величини. Способи завдання закону розподілу випадкової величини.

Тема 4. Числові характеристики випадкових величин

Математичне сподівання, дисперсія та їх властивості. Середнє квадратичне відхилення. Мода та медіана. Початкові і центральні моменти, асиметрія та ексцес.

Тема 5. Закон великих чисел

Поняття про закон великих чисел. Нерівність Чебишева.

Тема 6. Граничні теореми

Теорема Чебишева. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей. Застосування теореми на практиці. Теорема Бернуллі. Теорема Муавра-Лапласа.

Тема 7. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини

Функція розподілу ймовірностей. Щільність ймовірностей. Властивості функцій розподілу і щільності розподілу ймовірностей випадкової величини.

Тема 8. Основні закони розподілу випадкової величини

Біноміальний, пуассонівський, рівномірний закони розподілу. Нормальний, експоненціальний закони. Розподіл χ^2 . Розподіл Стьюдента.

Тема 9. Багатовимірні випадкові величини

Визначення багатовимірної випадкової величини та її закон розподілу. Система двох дискретних випадкових величин, числові характеристики системи. Функція розподілу ймовірностей та щільність ймовірностей системи, їх властивості. Умовні закони розподілу.

Тема 10. Елементи математичної статистики. Вибірковий метод

Задачі математичної статистики.

Вибірковий метод. Статистичні оцінки параметрів розподілу.

Генеральна та вибіркова сукупності. Статистичні розподіли вибірок. Гістограма і полігон. Числові характеристики вибірки та генеральної сукупності.

Тема 11. Статистичні оцінки параметрів розподілу

Точкові статистичні оцінки параметрів розподілу. Властивості точкових оцінок. Виправлена дисперсія.

Інтервальні статистичні оцінки. Надійний інтервал. Надійна імовірність та рівень значимості.

Тема 12. Елементи теорії кореляції

Функціональна, статистична і кореляційна залежності. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості. Кореляційні моменти.

Тема 13. Статистична перевірка статистичних гіпотез

Визначення статистичної гіпотези. Нульова й альтернативна гіпотези; проста і складна. Помилки першого і другого роду. Статистичний критерій. Критична область, критична точка. Загальна методика перевірки статистичних гіпотез. Критерій узгодженості Пірсона.

Тема 14. Елементи дисперсійного аналізу

Модель експерименту. Однофакторний аналіз. Аналіз показників на основі дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

Тема 15. Елементи регресійного аналізу

Рівняння лінійної парної регресії. Властивості статистичних оцінок параметрів парної функції регресії.

Множинна регресія.

Тема 16. Елементи теорії випадкових процесів і теорії масового обслуговування

Поняття випадкового процесу. Марковські випадкові процеси та елементи теорії масового обслуговування.

4. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.

Випадковою відносно комплексу умов називають подію, яка при здійсненні цього комплексу умов може мати місце, а може ні.

Математична наука, що вивчає ймовірностні закономірності масових однорідних випадкових подій, називається теорією ймовірностей.

Науку, для якої основною задачею є розробка методів аналізу статистичних даних в залежності від мети дослідження, називають математичною статистикою.

1. Деякі формули комбінаторики

Нехай задано скінчену множину елементів довільної природи. З них можна складати певні комбінації, кількість яких вивчає комбінаторика.

Перестановками називають комбінації, які складаються з одних і тих же n різних елементів і відрізняються лише порядком цих елементів. Число всіх можливих перестановок $P_n=n!$, де $n! = 1*2*3*...*n$ $(0!=1)$.

Приклад : скільки п'ятизначних чисел (кодів) можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожна цифра входить у зображення числа тільки 1 раз?

Розв'язання: $P_5 = 5! = 1*2*3*4*5=120$.

Розміщеннями називають комбінації, які складаються з n різних елементів по m елементів і відрізняються або складом елементів, або їх порядком. Число всіх можливих розміщень $A_n^m=n(n-1)*...(n-m+1)=n!/(n-m)!$

Приклад: скільки можливо скласти сигналів з 6 прапорців різного кольору, якщо взяти їх по 2.

Розв'язання. $A_6^2=6!/4!=6*5=30$.

Сполученнями називають комбінації, які складаються з n різних елементів по m елементів і відрізняються хоча б одним елементом. Число комбінацій $C_n^m =A_n^m/P_m=n!/(m!(n-m)!)=n(n-1)*...*(n-m+1)/m!$

Приклад: Скількома способами можливо вибрати 2 деталі з ящика, в якому 10 деталей?

Розв'язання. $C_{10}^2 =10!/(2!*8!)=45$.

Правило суми. Якщо якийсь вибір А можна здійснити m різними способами, а другий вибір В можна здійснити n способами, то вибір або А, або В можна здійснити m+n способами.

Правило добутку. Якщо якийсь вибір А можна здійснити m різними способами, а для кожного з цих способів деякий другий вибір В можна здійснити n способами, то вибір А і В (у вказаному порядку) можна здійснити m*n способами.

1

2. Випадкові події

2.1. Основні поняття.

Послідовність операцій, виконуваних з додержанням певного комплексу умов, називають експериментом (дослідом, спробою). Наслідок будь-якого експерименту називають подією.

Класифікація подій. Події поділяються на вірогідні, неможливі та випадкові.

Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається *вірогідною*. Вірогідна подія позначається символом Ω («омега»).

Наведемо приклади вірогідних подій: 1) у земних умовах вода, нагріта до температури 100 °С, набуває стану кипіння; 2) якщо в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10, то кулька, навмання взята із цієї урни, має номер, що міститься в межах від 1 до 10.

Подія називається *неможливою*, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ (порожня множина).

Приклад: в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10. Навмання береться одна кулька. Поява кульки з номером 12 буде подією неможливою.

Подія називається *випадковою*, якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі.

Випадкові події позначають символами A, B, C, ... або A_1, A_2, A_3, ...

Отже, випадкові події пов'язані з експериментами, наслідки яких є неоднозначними.

Приклад: монету підкидають один раз. (Тут і далі припускаємо, що падає монета на рівну і тверду підлогу.) Поява герба (цифри) — подія випадкова.

Якщо на дослідній ділянці в лабораторних умовах посіяно 100 зернин ячменю, то не можна передбачити наперед, скільки зернин проросте. Отже, подія, яка полягає в тому, що проросте від 1 до 100 зернин, є випадковою.

2.2. Прості та складені випадкові події. Простір елементарних подій.

Для математичного опису випадкових подій — наслідків експерименту — застосовують такі точні поняття: прості (елементарні) та складені випадкові події, простір елементарних подій.

Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), називається *простою* (*елементарною*) випадковою подією. Елементарні події позначаються ω_i, (і = 1, 2, 3,...) і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії, не поділяються на простіші складові.

Приклад 1. Монету підкидають один раз. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Можливі такі елементарні випадкові події: ω_1 - г (монета випаде гербом); ω_2 = ц (монета випаде цифрою).

Приклад 2. Монету підкидають двічі. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Дворазове підкидання монети — це одна спроба. Елементарними випадковими подіями будуть: ω_1 = гг (двічі випаде герб); ω_2 = цц (двічі випаде цифра); ω_3 = гц і ω_4= цг.

Отже, цьому експерименту відповідають чотири елементарні події.

Випадкова подія називається *складеною*, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами: A, B, C, D.

Приклад 3. Задано множину чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання із цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події: 1) з'явиться число, кратне 2; 2) число кратне 3; 3) число, кратне 5.

Розв'язання. Ці випадкові події будуть складеними. Позначимо їх відповідно А, В, С. Тоді А = = {2, 4, 6, 8, 10, 12}; В = {3, 6, 9, 12}; С={5, 10,}.

Елементарні випадкові події “5” та “10” називають *елементарними подіями, які сприяють* появі подій С унаслідок проведення експерименту.

Кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина Ω елементарних подій, кожна з яких може відбутися (настати) внаслідок його проведення. Множину Ω називають простором елементарних подій.

Простір елементарних подій може бути як дискретним, так і неперервним. Якщо множина є зчисленною (зліченною), тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати (кожній елементарній події поставити у відповідність один і тільки один елемент нескінченної послідовності натуральних чисел 1,2,3, ...), то простір елементарних подій називають дискретним. Він може бути обмеженим і необмеженим.

У противному разі (тобто коли кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число) простір елементарних подій називають неперервним.

У розглянутих раніше прикладах простори елементарних подій були дискретними.

Приклади неперервних (недискретних) просторів елементарних подій дістанемо, розглянувши: розміри однотипних деталей (діаметр, довжина), що їх виготовляє робітник або верстат-автомат; покази приладів, що вимірюють масу, силу струму, напругу, опір і т. ін.

Отже, поняття елементарної події, простору елементарних подій є основними в теорії ймовірностей, як точка та пряма в аксіоматично побудованій евклідовій геометрії. Сама природа елементарних подій у теорії ймовірностей при цьому неістотна.

3. Операції над подіями

Додавання. *Сумою* двох подій A і B називається така подія $C = A \cup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B. Подію $A \cup B$ схематично зображено на рис. 1 заштрихованою областю.

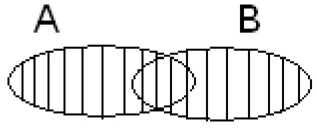


Рис. 1 Операція об 'єднання подій A и B.

Множення. *Добутком* двох подій A і B називається така подія C = A$\bigcap$B (C = AB), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Операція A$\bigcap$B називається *перерізом* цих подій (рис. 2).

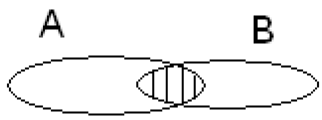


Рис. 2. Переріз подій A і B.

Приклад. Перерізом подій A = {2, 4, 6, 8, 10, 12} і B = {3, 6, 9, 12} з прикладу 3 є подія C_1 = {6}, а сумою є подія C_2 = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}.

Якщо $A\bigcap B=\varnothing$, то випадкові події A і B називають несумісними. Якщо $A\bigcap B\neq\varnothing$, то такі випадкові події.4 і B називають сумісними.

Повна група подій. Якщо $A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n=\Omega$, то такі випадкові події утворюють повну групу, а саме: внаслідок експерименту якась із подій $\{A_i\}$ обов'язково настане.

Протилежні події. Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають *протилежними.*

Подія, яка протилежна *A*, позначається $\overline{A}$. Протилежні події у просторі елементарних подій ілюструє рис. 3.

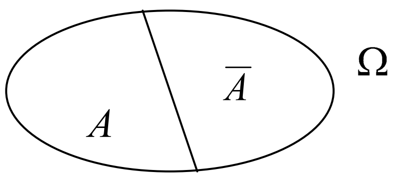


Рис. 3. Протилежні події.

Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події, що є числом такої ж природи, як відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається вірогідною; неможливою подією? Навес ти приклади.
2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.
3. Яка подія називається елементарною; складеною випад ковою подією? Навести приклади.
4. Що називається простором елементарних подій? Навести приклади.
5. Сумою двох випадкових подій А і В називається ...
6. Добутком двох випадкових подій А і В називається ...
7. Різницею двох випадкових подій А і В називається ...

ТЕМА 2. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

1. Класичне означення ймовірності

Імовірністю випадкової події А називається невід'ємне число $P(A)$ що дорівнює відношенню числа елементарних подій які сприяють появі А до кількості всіх елементарних подій простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{2.1}$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0$ ($m = 0$). Для вірогідної події $P(\Omega) = 1$. Отже, для довільної випадкової події $0 < P(A) < 1$ (оскільки $0 < m < n$).

Приклад. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту: n=15. Нехай А — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події А, дорівнює дев'яти (m = 9). Згідно з (2.1) маємо: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

2. Геометрична ймовірність

Класичне означення ймовірності придатне лише для експериментів з обмеженим числом рівноможливих елементарних подій, тобто коли множина її (простір елементарних подій) обмежена.

Якщо множина Ω є неперервною і квадровною, то для обчислення ймовірності A ($A \subset \Omega$) використовується геометрична ймовірність

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Якщо множина Ω вимірюється в лінійних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню довжин, якщо Ω вимірюється у квадратних одиницях, то Р (А) дорівнюватиме відношенню площ, і т. ін.

Приклад. По трубопроводу між пунктами А і В перекачують нафту. Яка ймовірність того, що пошкодження (якщо воно відбудеться) через деякий час роботи трубопроводу станеться на певній ділянці довжиною 100 м.

Розв'язання. Простір елементарних подій $\Omega = \{0 < l < 2км\}$, тоді $A = \{0 < l_A < 0{,}1км\}$. Згідно з (2.5) маємо:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{l_A}{l} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05.$$

3. Статистична ймовірність

На практиці обчислити ймовірності випадкових подій можна лише для обмеженого класу задач як для дискретних, так і для неперервних просторів елементарних подій (множини Ω). Для більшості задач, особливо економічних, обчислити ймовірності практично неможливо. У цьому разі використовується статистична ймовірність.

Насамперед уводиться поняття відносної частоти випадкової події $W(A)$.

Відносною частотою випадкової події A $W(A)$ називається відношення кількості експериментів m, при яких подія A спостерігалася, до загальної кількості n проведених експериментів:

$$W(A) = \frac{m}{n}. \tag{2.3}$$

Як і для ймовірності випадкової події, для відносної частоти виконується нерівність $0 < W(A) < 1$.

Статистичною ймовірністю випадкові події називається константа навколо якої групуються відносні частоти випадкової події.

4. Умовна ймовірність

4.1. Залежні та незалежні випадкові події.

Випадкові події А і В називають *залежними*, якщо поява однієї з них (А або В) впливає на ймовірність появи іншої. У противному разі випадкові події А і В називаються *незалежними*.

Приклад 1. В урні міститься 10 однакових кульок, із них 6 чорних і 4 білих. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька виявиться чорною і друга також.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо через А появу чорної кульки при першому вийманні, а через В — при другому. Випадкові події А і В будуть залежними, оскільки поява чорної кульки при першому її вийманні з урни (випадкова подія А) впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (випадкова подія В) при другому вийманні.

Приклад 2. З урни, де шість білих і чотири чорні кульки, вийняли дві кульки по одній, при цьому перша кулька в урну повертається.

З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша виявиться чорною, друга також.

<u>Розв'язання.</u> Нехай А — поява чорної кульки при першому вийманні, а В — при другому. Поява чорної кульки при першому вийманні (здійснилась подія А) не впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (подія В) при другому вийманні, оскільки співвідношення між чорними та білими кульками в цьому разі не змінюється.

4.2. Обчислення умовної ймовірності.

Якщо ймовірність випадкової події А обчислюється за умови, що подія В відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.4}$$

5. Формули ймовірностей добутку та суми випадкових подій

Згідно із (2.4) маємо:

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B). \tag{2.5}$$

Формула (2.5) має місце в загальному випадку. Якщо події A і B є незалежними то, за означенням, $P_B(A) = P(A)$. Для незалежних подій з (2.5) випливає:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A). \tag{2.6}$$

Імовірність суми двох несумісних поді A і B є:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{2.7}$$

Імовірність суми двох сумісних поді A і B є:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.8}$$

6. Імовірність появи хоча б однієї випадкової події

Нехай є *n* сумісних випадкових подій $A_1,\ A_2,...,\ A_n$. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що з'явиться хоча б одна з цих подій. Тоді подія $\overline{A}$ це подія за якої жодна з подій не відбудеться. Подія $\overline{A}$ визначається як $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n$. Події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу подій, тому

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Звідси одержуємо

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n)$$

За цією формулою треба обчислювати імовірність появи хоча б однієї випадкової події з *n* сумісних подій.

7. Формула повної ймовірності

У разі, коли випадкова подія А може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій $B_1,\ B_2,\ ...\ B_n$, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними, імовірність події А обчислюється за формулою

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A) \quad (2.9)$$

яка називається формулою повної ймовірності.

Випадкові події $B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_n$ називають гіпотезами.

9. Формула Байєса.

Нехай в умовах задачі, що відноситься до формули повної імовірності, зроблено один іспит, у результаті якого відбулася подія *А*. Запитується: як змінилися (у зв'язку з тим, що подія А уже відбулася) імовірності гіпотез, тобто величини $P_{B_k}(A)$, k = 1,....,n ?

Знайдемо умовну імовірність $P_{B_k}(A)$. За теоремою множення ймовірностей $P(A \cap B_k) = P(B_k)P_{B_k}(A) = P(A)P_A(B_k)$ маємо:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{P(A)}, \qquad (2.10)$$

де $P(A)$ обчислюється за формулою (2.9).

Формула (2.10) називається формулою Байєса (Томас Байєс, чи Бейєс (1702 – 1761) - англійський математик).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В якому разі $P_B(A) = 1$?
2. Формула множення ймовірностей для двох залежних випадкових подій А і В має вигляд...
3. Чому дорівнює $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події A_i є залежними?
4. Чому дорівнює $P(A \cap B)$, якщо *A* і *B* є незалежними?
5. В якому разі $P_B(A) = P(A)$, $P_A(B) = P(B)$?
6. Формула для обчислення появи випадкової події хоча б один раз при *n* незалежних експериментах має вигляд...

7. Гіпотези у формулі повної ймовірності та їх властивості.

8. Формула повної ймовірності випадкової події *A* за наявності n гіпотез B_i має вигляд...

9. В якому разі використовується формула Байєса?

10. В якому разі обирається гіпотеза B_i для прийняття рішення при проведенні експерименту?

11. Чому дорівнює $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$, де B_i є гіпотези у формулі повної ймовірності?

10. Схема незалежних випробувань Формула Бернуллі

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p і q, то їх називають експериментами за схемою Бернуллі. У кожному експерименті випадкова подія з імовірністю p відбувається, а з імовірністю q — не відбувається, тобто $p + q = 1$.

Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі — 2^n елементарних подій.

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія *A* з'явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^n q^{n-m}$$

Зауваження. Якщо імовірність появи події А в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість n випробувань, які необхідно здійснити, щоб з імовірністю P можна було стверджувати, що подія А з'явиться хоча б один раз, знаходять за формулою:

$$n > \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}.$$

11. Найімовірніше число появи випадкової події (мода)

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число m_0, для якого ймовірність $P(m_0)$ перевищує або в усякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

Якщо ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі (3.1), мають місце нерівності:

$$np - q \le m_0 \le np + q\,.$$

Число m_0 називають також *модою.*

Отже, найімовірніше число виробів першого сорту серед 200 дорівнює 180.

Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m пов'язане з певними труднощами. Щоб уникнути їх, застосовують асимптотичні формули, що випливають з локальної та інтегральної теорем Муавра — Лапласа.

12. Локальна теорема

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p $(0 < p < 1)$, то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A настане m раз, подається такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається *функцією Гаусса*, де

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Властивості функції Гаусса:

1) $\varphi(x)$ визначена на всій осі абсцис; $\varphi(x)$>0;

2) $\varphi(x)$ є функцією парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.

Приклад 1. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності такої випадкової події: виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.

Розв'язання. За умовою задачі маємо:

$n = 400$; $p = 0{,}75$; $q = 0{,}25$; $m = 290$.

$$\sqrt{npq} = 8{,}7;$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{290 - 300}{8{,}7} = -1{,}15;$$

$$P_{400}(290) = 0{,}0237.$$

13. Інтегральна теорема

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p, то для великих значень n імовірність появи випадкової події від m_1 до m_2 раз обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Інтегральна теорема має ще одну форму запису:

$$P_n\left(a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

Властивості функції Лапласа:

1. Ф(х) визначена на всій осі абсцис.

2. Ф(-х) = - Ф(x), отже, Ф(x) є непарною функцією.

3. Ф(0) = 0.

14. Використання інтегральної теореми

За допомогою інтегральної теореми можна оцінити близькість відносної частоти $W(A)$ до ймовірності p випадкової події A. Нехай p — імовірність появи випадкової події A в кожному експерименті за схемою Бернуллі й $W(A)$— відносна частота появи цієї події при n експериментах.

Необхідно оцінити ймовірність події $|W(A)-p| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ і є малою величиною). Якщо n набуває великих значень, то можна дістати:

$$P(|W(A)-p|<\varepsilon)=$$

$$=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад 1. Імовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту, який має на меті виявити надійність виробу в роботі, дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Чому дорівнює ймовірність такої події: абсолютна величина відхилення відносної частоти виходу із ладу виробів від імовірності p = 0,2 становить ε = 0,01?

Розв'язання. За умовою задачі: n = 400; p = 0,2; q= 0,8; ε = 0,01. Підставивши ці значення в (3.6), дістанемо

$$P(|W(A)-0{,}2|<0{,}01)=2\Phi(0{,}5)=0{,}383.$$

15. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність асимптотичної формули Лапласа для великих значень n — числа повторних незалежних експериментів за схемою Бернуллі — знижується з наближенням p до нуля. Тому при $n\to\infty$, $p\to 0$ за умови $np = a =$ const імовірність появи випадкової події m раз ($0<m<n$) обчислюється за асимптотичною формулою:

$$P_n(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

яка називається формулою Пуассона.

Приклад 1. Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю p = 0,002. Обчислити ймовірності таких випадкових подій

1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи;
2) від трьох до шести.

Розв'язання. За умовою задачі маємо n = 1000; p = 0,002; m = 3; $3 \le m \le 6$. Оскільки n велике, а p мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо формулу (3.7). Для цього обчислимо значення параметра a = 1000 • 0,002 = 2.

1) $P_{1000}(3)$ = 0,18044.

2) P_{1000} $(3 \le m \le 6)$ = $P_{1000}(3)$ + P_{1000} (4) + P_{1000} (5) + $P_{1000}(6)$ =
= 0,180447 + 0,168031 + 0,100819 + 0,050409 + 0,021604 = 0,52131.

16. Проста течія подій

Означення 1. Течією подій називають послідовність таких подій, які з'являються у випадкові моменти часу.

Наприклад, заява до диспетчерського пункту з викликом таксі.

Означення 2. Середнє число λ появ події А в одиницю часу називають інтенсивністю течії.

Означення 3. Течія подій називається *пуассонівською*, якщо вона:

1. *Стаціонарна*, тобто кількість k появ події залежить лише від довжини проміжку часу Δt і не залежить від того, де міститься Δt щодо початку відліку часу.

2. *Має властивість відсутності післядії*, тобто імовірність появи події не залежить від появи або не появи події раніше.

3. *Ординарна*, тобто імовірність появи більше однієї події в малий проміжок часу є величина нескінченно мала у порівнянні з імовірністю появи події один раз у цей проміжок часу.

Теорема . Якщо течія подій пуассонівська, то імовірність появи події А m разів за час t можна знайти за формулою

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

де λ - інтенсивність течії.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які експерименти називають експериментами за схемою Бернуллі?
2. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей ?
3. Що називають найімовірнішим числом (модою)?
4. Довести, що $np - q \le m_0 \le np + p.$
5. Чому дорівнює $\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$?
6. Сформулювати локальну теорему Маувра-Лапласа.
7. Сформулювати інтегральну теорему Маувра-Лапласа.
8. Чому дорівнює $P(|W(A) - p| < \varepsilon)$?
9. Функція Гаусса та її властивості.
10. Функція Лапласа та її властивості.
11. За якої умови використовується формула Пуассона ?

Тема 3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Поняття події в теорії ймовірностей являє собою абстрактну модель певної якісної ознаки, що відбиває лише два альтернативні судження: є подія (відбулася) або немає (не відбулася). Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уведення такого нового поняття, як випадкова величина — абстрактної моделі кількісної ознаки.

1. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу їх ймовірностей

Величина називається випадковою, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Випадкові величини позначають великими літерами X, Y, Z, , а їх можливі значення - відповідними малими літерами з індексами.

Випадкові величини бувають дискретними та неперервними.

Означення 1. Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка може приймати відокремлені ізольовані одне від одного числові значення (їх можна пронумерувати). Кількість можливих значень ДВВ може бути скінченою або нескінченою.

Приклад 1. Кількість влучень у мішень при трьох пострілах буде *X* : 0, 1, 2, 3. Отже, *X* може приймати чотири ізольовані числові значення. Тому *X* - дискретна випадкова величина.

Означення 2. Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченого або нескінченого інтервалу (*a*, b). Кількість можливих значень такої величини є нескінчена.

Приклад 2. Величина похибки, яка може бути при вимірюванні відстані; час безвідмовної роботи приладу; зріст людини; розміри деталі, яку виготовляє станок-автомат.

ДВВ X можна описати, указавши перелік значень, які ця величина приймає: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Подія, що випадкова величина прийняла значення x_i ($X = x_i$) будемо позначати символом w_i. Тоді сукупність подій w_i ($i = \overline{1, n}$) утворює простір подій даного експерименту: $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Можна дати наступне означення випадкової величини. Випадкова величина це функція визначена на просторі подій даного експерименту: $x_i = X(w_i)$. Це означення прийнятне і для НВВ.

У разі, коли $X(w)$ відображає множину Ω. на одновимірний простір R_1 випадкову величину називають одновимірною. Якщо відображення здійснюється на R_n то випадкову величину називають n- вимірною (системою n випадкових величин або n- вимірним випадковим вектором).

Для повної характеристики випадкової величини треба вказати не тільки усі її можливі значення, але й закон, за яким знаходять ймовірності кожного значення.

Означення 3. Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

У випадку дискретної випадкової величини Х функціональну залежність можна задавати таблично, аналітично або графічно.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини *X*, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм ймовірностей:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k

Оскільки випадкові події $w_i = (X = x_i)$ і $w_m = (X = x_m)$ є між собою несумісними і утворюють повну групу , то необхідною є така умова:

$$\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1. \tag{3.1}$$

Рівність (3.1) називають умовою нормування для дискретної випадкової величини Х. Наведену таблицю називають рядом розподілу.

2. Функція розподілу ймовірностей

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме: як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

У випадку неперервної випадкової величини для її повної характеристики вводять інтегральну та диференціальну функції розподілу.

Означення 4. Інтегральною функцією розподілу $F(x)$ (функцією розподілу) називають ймовірність того, що випадкова величина *X* прийме значення, менше *x*:

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.2}$$

Якщо НВВ *X* може приймати будь-яке значення з (*a, b*), то

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a), \tag{3.3}$$

тобто ймовірність прийняття величиною X значень з $(a,\ b)$ дорівнює приросту функції розподілу.

Формулу (3.3) часто називають основною формулою теорії ймовірностей.

Означення інтегральної функції розподілу та властивості ймовірності P дозволяють одержати такі властивості функції розподілу:

1) $0 \le F(x) \le 1$.

2) $F(x)$ є неспадною функцією аргументу x, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Щільність ймовірностей (диференціальна функція) $f(x)$ і її властивості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Означення 5. Диференціальною функцією розподілу або щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від її інтегральної функції розподілу і позначають

$$f(x) = F'(x) \tag{3.4}$$

Назва «щільність ймовірностей» випливає з рівності

$$f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{P(X < x + \Delta x) - P(X < x)}{\Delta x}. \tag{3.5}$$

Із формули (3.4) випливає, що функція розподілу $F(x)$ є первісною для диференціальної функції розподілу $f(x)$. З (3.3) та (3.4) легко довести наступну теорему.

Теорема . Ймовірність того, що неперервна випадкова величина Х прийме значення з інтервалу (а, Ь), можна знайти за формулою

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Наслідок. Якщо диференціальна функція розподілу (щільність ймовірності) $f(x)$ відома, то інтегральну функцію розподілу $F(x)$ можна знайти за формулою

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Диференціальна функція розподілу НВВ має такі властивості:

1) $f(x) \geq 0$ тому, що вона є похідною неспадної функції $F(x)$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ тому, що подія $\{-\infty < X < \infty\}$ — достовірна.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1.Означення випадкової величини.

2.Означення дискретної і неперервної випадкової величини.

3.Умова нормування для дискретної випадкової величини.

4.Закон розподілу випадкової величини.

5.Що називається функцією розподілу випадкової величини?

6.Довести, що $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

7.Чому дорівнює $F(-\infty)$, $F(\infty)$?

8.Чому дорівнює $P(\alpha < X < \beta)$?

9.Довести, що для неперервної випадкової величини

$P(X = x) = \ldots$

10. Означення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини X.

11.Чому дорівнює: $\int^{\infty} f(x)dx$?

12. Чому дорівнює: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$?

Тема 4. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закон розподілу ймовірностей як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри і називають числовими характеристиками випадкових величин.

1. Математичне сподівання

Однією з найчастіше застосовуваних на практиці характеристик є математичне сподівання.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad .$$

Якщо простір є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини *X* називається величина

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C$$

2. $M(CX) = CM(X)$.

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$M(A + BX) = A + BM(X)$$

2. Мода та медіана випадкової величини

Модою (*Mo*) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

$$f(Mo) = \max .$$

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл ймовірностей називають одномодальним; якщо розподіл має дві моди — двомодальним і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. їх називають антимодальними.

Медіаною (*Me*) неперервної випадкової величини *X* називають те її значення, для якого виконується рівність:

$$F(Me) = 0.5$$

3. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню *M*(*X*) може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Математичне сподівання називають центром розсіювання. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають дисперсією.

Для визначення дисперсії розглядається відхилення випадкової величини *X* від свого математичного сподівання $(X - M(X))$.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для дискретної випадкової величини *X* дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 ,$$

для неперервної $$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 dx.$$

Властивості дисперсії

1. Якщо C – стала величина, то

$$D(C) = C.$$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$D(A + BX) = B^2 M(X)$$

Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad .$$

4. Початкові та центральні моменти

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Для ДВВ

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i ,$$

для НВВ

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання від $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k.$$

5. Асиметрія і ексцес

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\mu_3 = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно M(X). Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину — коефіцієнт асиметрії:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Центральний момент четвертого порядку використовується для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність, або гостровершинність щільності ймовірності $f(x)$. Ексцес обчислюється за формулою

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Тема 5. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ
Тема 6. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

Граничні теореми теорії ймовірностей встановлюють відповідність між теоретичними та дослідними характеристиками випадкових величин або випадкових подій при великій кількості випробувань. Граничні теореми описують також граничні закони розподілу.

Граничні теореми, які встановлюють відповідність між теоретичними та дослідними характеристиками випадкових подій, об'єднують загальною назвою - закону великих чисел.

Нерівність Чебишова.

Якщо випадкова величина має обмежені $M(X)$ і $D(X)$, то

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишова.

Нехай задано n незалежних випадкових величин X_i $(i = 1, 2, ..., n)$, обмежені $M(X_i)$ і $D(X_i)$ ($D(X_i) < C$), тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей

Нехай задано n незалежних випадкових величин X_i $(i = 1, 2, ..., n)$, кожна із яких має один і той самий закон розподілу ймовірностей із $M(X_i) = 0$, $\sigma(X_i) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|$, тоді зі зростанням числа n закон розподілу $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ наближається до нормального.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як сформулювати в загальному вигляді закон великих чисел?
2. Сформулювати нерівність Чебишова.
3. Сформулювати умови, які мають виконуватися для нерівності Чебишова.
4. Де використовується нерівність Чебишова.
5. Сформулювати теорему Чебишова.
6. Сформулювати центральну граничну теорему.

Тема 7. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Тема 8. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

1. Біноміальний закон розподілу.

Цей закон має вигляд

$$P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}, \quad m=0,1,2,\ldots,n$$

і використовується у схемі Бернуллі, тобто у випадку n незалежних повторних випробувань, в кожному з яких деяка подія з'являється з ймовірністю p.

Для біноміального розподілу

$M(X)=np, \qquad D(X)=npq.$

2. Закон розподілу Пуассона

ДВВ X приймає злічену множину значень $(m=0,1,2,\ldots.)$ з ймовірностями

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Цей розподіл використовують у задачах статистичного контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування, для обчислення: кількості вимог на виплату страхових сум за рік, кількості дефектів однакових виробів.

Для розподілу Пуассона

$M(X)=a, \qquad D(X)=a.$

3. Рівномірний розподіл

Означення 1. НВВ *X* розподілена рівномірно на проміжку (a,b), якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність її ймовірностей на цьому проміжку постійна, тобто

$$f(x)=\begin{cases} C=\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b); \\ 0, & x\notin(a,b). \end{cases}$$

Величина сталої C визначається умовою нормування

$$P(a<X<b)=C(b-a)=1.$$

Цей розподіл задовольняють, наприклад, похибки округлення різноманітних розрахунків.

Числовими характеристиками НВВ X, що розподілена за рівномірним законом, будуть

$$M(X)=\frac{b+a}{2}, \qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

4. Експоненціальний розподіл

Означення 2. Випадкову величину *X* називають розподіленою за експоненціальним законом, якщо щільність її ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

де $\lambda > 0$ - параметр.

Експоненціальному розподілу задовольняють: час телефонної розмови, час ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютера. Числовими характеристиками експоненціального розподілу будуть

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

5. Нормальний розподіл

Означення 3. Випадкову величину *X* називають розподіленою нормально, якщо щільність її ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Графік цієї функції $f(x)$ називають нормальною кривою або кривою Гауса.

Для цього розподілу

$$M(X)=a, \qquad D(X)=\sigma^2.$$

Отже, математичне сподівання нормального розподілу дорівнює параметру *a* цього розподілу, а середнє квадратичне відхилення дорівнює параметру σ.

Зауваження. Якщо випадкова величина *X* розподілена за нормальним законом з параметрами *a* та σ, то випадкова величина $Z=\dfrac{X-a}{\sigma}$ буде розподілена за *нормованим* нормальним законом і $M(Z)=0, \quad \sigma(Z)=1$.

6. Розподіл χ^2 («хі-квадрат»)

Нехай X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ - нормальні, нормовані незалежні величини, тобто їх математичне сподівання дорівнює нулю, середнє квадратичне відхилення дорівнює одиниці і кожна з них розподілена за нормальним законом. Тоді сума квадратів цих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

розподілена за законом χ^2 з $k = n$ степенями свободи.

Якщо величини X_i зв'язані одним лінійним співвідношенням, наприклад, $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$, то число ступенів свободи буде $k = n - 1$.

Відмітимо, що розподіл χ^2 визначається параметром – числом ступенів свободи k. Коли k зростає, розподіл χ^2 прямує до нормального розподілу дуже повільно.

7. Розподіл Стьюдента

Нехай X - нормальна нормована випадкова величина, а Y - незалежна від X величина, яка розподілена за законом хі-квадрат з k степенями свободи. Тоді величина

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}$$

має розподіл, який називають t розподілом або розподілом Стьюдента (це є псевдонім англійського статистика Вільяма Госсета) з k степенями свободи.

При зростанні k розподіл Стьюдента швидко наближається до нормального розподілу.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначення нормального закону розподілу.

2. Як впливають параметри а, σ на графіки функцій f(x), F(x) загального нормального закону.
3. Що називають нормованим нормальним законом?
4. Довести, що Mo для нормального закону буде дорівнювати … .
5. Чому дорівнює Me для нормального закону?
6. Навести визначення μ3 для нормального розподілу.

Тема 9. БАГАТОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. В цьому разі кажуть, що визначена багатовимірна випадкова величина.

Означення. Одночасна поява внаслідок експерименту n випадкових величин $(X_1, X_2,..., X_n)$ з певною ймовірністю являє собою n-винірну випадкову величину, яку називають також системою n випадкових величин, або випадковим вектором.

1. Система двох дискретних випадкових величин (*X, Y*) та їх числові характеристики

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм ймовірностей спільної появи.

У табличній формі цей закон має вигляд:

X / Y	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	p_{y_i}
y_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	p_{y1}
y_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	p_{y2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_k	p_{k1}	p_{k2}	$\cdots$	p_{km}	p_{yk}
p_{x_j}	p_{x1}	p_{x2}	$\cdots$	p_{xm}	

Тут:

$$p_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\ , \quad p_{x_j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}$$

Числові характеристики величин *X, Y*:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_j p_{x_j}\ ,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_{x_j} - M^2(X),$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} y_i p_{y_i}\ ,$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{J=1}^{m} y_i^2 p_{ij} - M^2(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 p_{y_i} - M^2(Y),$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

2. Коефіцієнт кореляції

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясовувати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. Для цього застосовують кореляційний момент:

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y).$$

У разі $K_{xy} = 0$ кореляційний зв'язок відсутній.

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

$\left| r_{xy} \right| \leq 1$, або $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

3. Умовні закони розподілу.

Означення. Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини X та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значені $Y = y_i$.

У табличній формі:

$X = x_j$	x_1	x_2	$\dots$	x_m
p_j	p_{i1} / p_{y_i}	p_{i2} / p_{y_i}	$\dots$	p_{im} / p_{y_i}

4. Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин

Означення. Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію двох аргументів x, y, яка визначає ймовірність спільної появи подій $(X < x) \bigcap (Y < y)$:

$$F(x, y) = P\left((X < x) \bigcap (Y < y)\right).$$

Властивості $F(x, y)$.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. $\lim\limits_{y \to \infty} F(x, y) = F(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x, y) = F(y)$.
3. $F(x, y)$ є неспадною функцією аргументів x і y.
4. Ймовірність влучення точки (X, Y) в довільний прямокутник $(a < X < b; c < Y < d)$ обчислюється за формулою:

$$P(a < X < b; c < Y < d) = F(b,d) + F(a,c) - F(a,d) - F(b,c).$$

5. Щільність ймовірностей системи двох випадкових величин.

Ймовірність розміщення системи (X,Y) у прямокутній області $(x < X < x + \Delta x; y < Y < y + \Delta y)$ обчислюється за формулою:

$$P(x < X < x + \Delta x; y < Y < y + \Delta y) = F''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y = f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

Означення. Щільністю ймовірностей системи двох випадкових величин називається друга похідна від функції $F(x,y)$:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Властивості $f(x,y)$

1. $f(x,y) \geq 0$, оскільки $F(x,y)$ є неспадною функцією аргументів x і y.
2. Умова нормування системи двох неперервних випадкових величин (X,Y) є:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

3. Функція розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин визначається з рівняння:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

6. Числові характеристики системи двох неперервних випадкових величин.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)\,dx\,dy,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x,y)dx\,dy-M^2(X),$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dx\,dy,$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f(x,y)dx\,dy-M^2(Y),$$

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dx\,dy-M(X)M(Y).$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означення багатовимірної випадкової величини .
2. Означення закону розподілу багатовимірної випадкової величини.
3. Основні числові характеристики для системи двох дискретних випадкових величин.
4. Що визначає кореляційний момент ?
5. Чому дорівнює K_{xy} ?
6. Коефіцієнт кореляції та його властивості.
7. Якщо K_{xy}=0 , то чому дорівнює r_{xy} ?
8. Що називається умовним законом розподілу Y/x ?
9. Умови нормування для системи двох дискретних випадкових величин.

Тема 10. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД

1. Предмет математичної статистики

Мета кожного наукового дослідження - виявлення закономірностей явищ, які спостерігають, та використання цих закономірностей у повсякденній практичній діяльності. Для встановлення цих закономірностей проводять спеціальні досліди та спостерігають одиничні явища. Далі роблять узагальнений висновок у вигляді закону.

У тих випадках, коли явище знаходиться під дією багатьох факторів і неможливо виявити вплив усіх цих факторів, застосовують інший метод вивчення - ***статистичний,*** тобто систематизація та обробка статистичних даних однорідних дослідів.

Звичайним є використання статистичних методів в економіці, соціології, політології.

Нехай, наприклад, темп приросту промислового виробництва за певний період часу дорівнює 5%. Це означає, що в середньому для усієї сукупності підприємств показник 5% є статистичною закономірністю зростання промислового виробництва. Цей середній показник не виключає, а, навпаки, припускає, що на окремих підприємствах темп приросту може бути більше або менше 5%.

Предмет математичної статистики полягає в розробці методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків.

Вкажемо основні задачі, які розв'язує математична статистика:

1) вказати способи збору та групування (якщо даних дуже багато) статистичних відомостей;
2) визначити закон розподілу випадкової величини або системи випадкових величин за статистичними даними;
3) визначити невідомі параметри розподілу;
4) перевірити правдоподібність припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення параметра, який оцінюють.

Можна сказати, що основна задача математичної статистики - розробка методів аналізу статистичних даних в залежності від мети дослідження.

Методи математичної статистики ефективно використовують при розв'язанні багатьох задач науки, організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

Математична статистика виникла (XVII ст.) та почала розвиватись паралельно з теорією імовірностей. Подальшим розвитком (кінець XIX - початок XX ст.) математична статистика зобов'язана П.Л.Чебишову, А.А.Маркову, О.М.Ляпунову, а також К.Гауссу, Ф.Гальтоігу, К.Пірсону та іншим. У XX ст. найбільший вклад у математичну статистику зробили В.І.Романовський, Е.Е.Слуцький, А.Н.Колмогоров, Стьюдент (псевдонім

У.Госсета), Е.Пірсон, Ю.Нейман, А.Вальд, А.В.Скороход, В.С.Королюк та інші вчені.

2. Генеральна та вибіркова сукупності

Нехай потрібно вивчити сукупність об'єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки, які характеризують ці об'єкти. Кожен об'єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Розглядаючи лише одну ознаку кожного об'єкта, ми припускаємо, що інші ознаки рівноправні, або що множина ***об'єктів однорідна.***

Такі множини однорідних об'єктів називають ***статистичною сукупністю.***

Наприклад, якщо досліджують партію деталей, то якісною ознакою може бути стандартність або нестандартність кожної деталі, акількісною ознакою - розмір деталі. Кількісні ознаки бувають ***неперервними*** та ***дискретними.***

Перевірку сукупності деталей можна провести двома способами:

1) провести перевірку (контроль) усіх деталей;
2) перевірити лише певну частину деталей.

Якщо деталей дуже багато або перевірка пов'язана з руйнуванням деталі (наприклад, випробування деталі на міцність), тоді перший спосіб перевірки не доцільний. Якщо дослідити усі деталі неможливо, тоді відбирають із усієї сукупності обмежене число деталей і перевіряють лише їх.

Вибірковою сукупністю (вибіркою) *називають сукупність випадково взятих об'єктів.*

Генеральною *називають сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку.*

Об'ємом сукупності (вибіркової або генеральної) *називають кількість об'єктів цієї сукупності.*

Наприклад, якщо з 5000 виробів для дослідження взято 50, тоді об'єм генеральної сукупності N = 5000, а об'єм вибірки $n = 50$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дати визначення генеральної та вибіркової сукупності.
2. Що називається варіантою.

3. Дати визначення дискретного статистичного розподілу вибірки.
4. Що називається емпіричною функцією?
5. Властивості $F^*(x)$.
6. Що називається інтервальним статистичним розподілом вибірки?
7. Що являє собою полігон частот і відносних частот?
8. Що називається гістограмою частот і відносних частот?

Тема 11. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

1. Загальні поняття

Означення 1. ***Точковими оцінками параметрів розподілу генеральної сукупності*** *називають такі оцінки, які визначаються одним числом.*

Наприклад, вибіркова середня $x_в$, вибіркова дисперсія та вибіркове середньоквадратичне - точкові оцінки відповідних числових характеристик генеральної сукупності.

Точкові оцінки параметрів розподілу є випадковими величинами, їх можна вважати первинними результатами обробки вибірки тому, що невідомо, з якою точністю кожна з них оцінює відповідну числову характеристику генеральної сукупності.

Якщо об'єм вибірки досить великий, то точкові оцінки задовольняють практичні потреби точності.

Якщо об'єм вибірки малий, то точкові оцінки можуть давати значні похибки, тому питання точності оцінок у цьому випадку дуже важливе і використовують інтервальні оцінки.

Означення 2. ***Інтервальною*** *називають оцінку, яка визначається двома числами — кінцями інтервалу.*

Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність та надійність оцінок. Ознайомимось з цими поняттями.

Нехай знайдена за даними вибірки статистична оцінка $\theta*$ буде оцінкою невідомого параметра θ.

Ясно, що $\theta*$ тим точніше визначає θ, чим менше абсолютна величина різниці θ-$\theta*$.

Але статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка θ^* задовольняє нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Таке твердження можна зробити лише з імовірністю γ.

Означення 3. ***Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки параметра*** θ ***за*** θ^* *називають імовірність*

$$\gamma = P(|\theta - \theta^*| < \delta)$$

з *якою виконується нерівність* $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Найчастіше число γ задається наперед і, залежно від обставин, воно дорівнює 0,95 або 0,99 або 0,999.

Формулу можна записати у вигляді

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma$$

З цієї рівності випливає, що інтервал $(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta)$ містить невідомий параметр θ генеральної сукупності.

Означення 4. *Інтервал* $(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta)$ *називають* ***довірчим,*** *якщо він покриває невідомий параметр* θ *із заданою надійністю* γ.

Зауваження. Кінці довірчого інтервалу є випадковими величинами.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке точкові статистичні оцінки?
2. Що таке інтервальні статистичні оцінки?

Тема 12. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ

Функціональна, статистична і кореляційна залежності

Кожній величині, яку дістають у результаті проведення експерименту, притаманний елемент випадковості, що виявляється більшою чи меншою мірою залежно від її природи.

При сумісній появі двох і більше величин у результаті проведення експерименту дослідник має підстави для встановлення певної залежності між ними, зв'язку.

Ідея зв'язку між змінними величинами має особливе, принципове значення в економетричних дослідженнях, де здійснюється перевірка на адекватність створених математичних моделей реальним економічним процесам, в яких співвідношення між змінними пов'язані функціональною залежністю.

Строгої функціональної залежності між змінними, у буквальному розумінні цього слова, у реальному світі не існує, бо вони перебувають під впливом випадкових факторів, наслідки якого передбачити практично неможливо. Тому між змінними існує особлива форма зв'язку, яку називають стохастичною (про що йшлося в попередніх темах) і яка в математичній статистиці трансформується, не змінюючи своєї сутності, у статистичну залежність.

Наприклад, при дослідженні двох змінних X та Y зміна значень X-X_I призводить до такої зміни значень Y, яку можна розбити на два компоненти: систематичну, що пов'язана із залежністю, котра існує між X та Y, і випадкову, яка зазнає впливу випадкових факторів.

Показником, що вимірює стохастичний зв'язок між змінними, є *коефіцієнт кореляції,* який свідчить з певною мірою ймовірності, наскільки зв'язок між змінними близький до строгої лінійної залежності.

Значно збільшується цінність коефіцієнта кореляції для випадкових змінних, що мають закон розподілу ймовірностей, близький до нормального. Для таких величин відсутність кореляції одночасно означає і відсутність будь-якої залежності між ними.

Крім цього, як і в дисперсійному аналізі, кореляційний аналіз оцінює, наскільки значні невипадкові змінні у випадкових величинах у процесі проведення експерименту.

За наявності кореляційного зв'язку між змінними необхідно виявити його форму функціональної залежності (лінійна чи нелінійна), а саме:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x,$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

$$y = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x}.$$

Наведені можливі залежності між змінними X і Y називають *функціями регресії.* Форму зв'язку між змінними X і Y можна встановити, застосовуючи кореляційні поля. На основі розміщення точок кореляційного поля дослідник має підстави для гіпотетичного припущення про лінійні чи нелінійні залежності між ознаками X і Y.

Для двовимірного статистичного розподілу вибірки ознак *(X, Y)* поняття статистичної залежності між ознаками X та Y має таке визначення:

статистичною залежністю X від Y називають таку, за якої при зміні значень ознаки $Y = y_i$ змінюється умовний статистичний розподіл ознаки X, статистичною залежністю ознаки Y від X називають таку, за якої зі зміною значень ознаки $X = x_i$ змінюється умовний статистичний розподіл ознаки Y.

У разі зміни умовних статистичних розподілів змінюватимуться і умовні числові характеристики.

Звідси випливає визначення кореляційної залежності між ознаками X і Y. Кореляційною залежністю ознаки X від Y називається функціональна залежність умовного середнього $\bar{y}_x$ від аргументу х, що можна записати так:

$$\bar{y}_x = \varphi(x)$$

Аналогічно кореляційною залежністю ознаки X від Y називається функціональна залежність умовного середнього $\bar{x}_y$ від аргументу у, що можна записати, так:

$$\bar{x}_y = \psi(x)$$

Між ознаками X та Y може існувати статистична залежність і за відсутності кореляційної. Але коли існує кореляційна залежність між ознаками X та Y,

то обов'язково між ними існуватиме і статистична залежність.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що означає функціональна залежність між ознаками X та Y ?
2. Дати визначення статистичної залежності між ознаками X та Y .
3. Що означає кореляційна залежність між ознаками X та Y ?
4. Що таке коефіцієнт кореляції?

Тема 13. СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ.

1. Статистичні гіпотези та їх різновиди

Часто необхідно знати закон розподілу генеральної сукупності. Якщо закон розподілу невідомий, але є міркування для припущення його певного вигляду *A,* наприклад, розподіл рівномірний, показниковий або нормальний, тоді висувають гіпотезу:

генеральна сукупність розподілена за законом A.

У цій гіпотезі йде мова про вигляд невідомого розподілу. Іноді закон розподілу генеральної сукупності відомий, але його параметри (числові характеристики) невідомі. Якщо є міркування припустити, що невідомий параметр θ дорівнює певному значенню θ_0 то висувають гіпотезу: $\theta = \theta_0$. Ця гіпотеза вказує припущену величину параметра відомого розподілу.

Можливі також інші гіпотези: про рівність параметрів двох різних розподілів, про незалежність вибірок, та багато інших.

Означення 1. ***Статистичними*** *називають гіпотези про вигляд розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.*

Наприклад, статистичними будуть гіпотези:

- генеральна сукупність розподілена за нормальним законом;
- дисперсії двох сукупностей, розподілених за законом Пуассона, рівні між собою. ,

Відомо, що на творчі можливості людей впливають не тільки гени але й умови життя. Розглянемо гіпотези:

значна частина народжених у першому півріччі має краще розвинену ліву частину мозку, яка здійснює логічне мислення;

значна частина людей, народжених у другому півріччі, має краще розвинену праву частину мозку, яка здійснює образне мислення.

Ці гіпотези не статистичні, бо в них не йде мова ні про вигляд, ні про параметри розподілу. Але для вказаної ситуації можна сформулювати декілька статистичних гіпотез.

Разом з припущеною гіпотезою завжди можна розглядати протилежну їй гіпотезу. Якщо припущена гіпотеза була відхилена, тоді має місце протилежна гіпотеза. Отже, ці гіпотези доцільно відрізняти.

Означення 2. ***Основною (нульовою)*** *називають припущену гіпотезу і позначають* H_o.

Означення 3. ***Альтернативною (конкурентною)*** *називають гіпотезу, що суперечить основній, її позначають* H_1.

Наприклад, якщо H_o: $M(X) = 6$, то H_1: $M(X) \neq 6$.

Гіпотези можуть містити тільки одне або більше одного припущення.

Означення 4. *Гіпотезу звуть* ***простою,*** *якщо вона містить лише одне припущення.*

Означення 5. *Гіпотезу називають* ***складною,*** *якщо вона складається із скінченої або нескінченої кількості простих гіпотез.*

2. Похибки перевірки гіпотез

Статистична гіпотеза, яка висунута, може бути правильною або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки.

Перевірка гіпотези здійснюється за даними вибірки, тобто статистичними методами. Тому перевірку гіпотези за даними вибірки називають ***статистичною.***

При перевірці статистичної гіпотези за даними ***випадкової вибірки*** можна зробити хибний висновок. При цьому можуть бути похибки першого та другого роду.

Означення 1. *Якщо за висновком буде відкинута правильна гіпотеза, то кажуть, що це* ***похибка першого роду.***

Означення 2. *Якщо за висновком буде прийнята неправильна гіпотеза, то кажуть, що це* ***похибка другого роду.***

Відмітимо, що наслідки цих похибок можуть бути різними. Наприклад, якщо відкинути правильну гіпотезу «продовжити будівництво м'ясокомбінату», то ця похибка першого роду буде сприяти матеріальним витратам.

Якщо прийняти неправильну гіпотезу «продовжити будівництво, не враховуючи можливості обвалу об'єкта будівлі», то внаслідок цієї похибки другого роду можуть загинути люди.

Означення 3. *Імовірність здійснити похибку першого роду позначають α і називають* ***рівнем значущості.***

Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01. Якщо прийнято рівень значущості рівним 0,05, то це означає, що в п'яти випадках із 100 ми ризикуємо одержати похибку першого роду (відкинути правильну гіпотезу).

Зауваження. *При контролі якості продукції імовірність признати нестандартними стандартні вироби називають* ***ризиком виробника,*** *а імовірність признати придатними браковані вироби називають* ***ризиком споживача.***

3. Критерії узгодження для перевірки гіпотез

Перевірку статистичної гіпотези можна здійснити лише з використанням даних вибірки. Для цього слід обрати, деяку випадкову статистичну характеристику (вибіркову функцію), точний або наближений розподіл якої відомий, і за допомогою цієї характеристики перевірити основну гіпотезу.

Означення 1. ***Статистичним критерієм узгодження перевірки гіпотези*** *(або просто* ***критерієм)*** *називають випадкову величину К, розподіл якої (точний або наближений) відомий і яка застосовується для перевірки основної гіпотези.*

Наприклад, для перевірки гіпотез про рівність дисперсії двох нормальних генеральних сукупностей за статистичну характеристику *К* вибирають відношення виправлених вибіркових дисперсій

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

В різних дослідах дисперсія буде приймати різні, наперед невідомі значення, тому F це величина випадкова. Вона розподілена за законом Фішера-Снедекора.

Означення 2. ***Спостереженим значенням критерію узгодження*** *називають значення відповідного критерію, обчислене за даними вибірки.*

Існує багато критеріїв узгодження. Наприклад, найбільш точний (асимптотично) критерій Неймана-Пірсона використовує нерівності або відношення функцій правдоподібності.

4. Критична область

Після обрання певного критерію узгодження, множину усіх його можливих значень поділяють на дві підмножини, що не перетинаються: одна з них містить значення критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється, а друга - при яких вона приймається.

Означення 3. ***Критичною областю*** *називають сукупність значень критерію, при яких основна гіпотеза відхиляється.*

Означення 4. ***Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень)*** *називають множину значень критерію, при яких гіпотезу приймають.*

Критерій узгодження *К* - одновимірна випадкова величина, усі її можливі значення належать деякому інтервалу. Тому критична область та область прийняття гіпотези також будуть інтервалами, а це означає, що існують точки, які ці інтервали відокремлюють.

Означення 5. ***Критичними точками (межами) критерію К*** *називають точки $k_{кр}$, які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.*

Розрізняють однобічну (правобічну та лівобічну) та двобічну критичні області.

Означення 6. ***Правобічною*** *називають критичну область, що визначається нерівністю $K > k_{кр}$, де $k_{кр}$ - додатне число.*

Означення 7. ***Лівобічною*** *називають критичну область, гир визначається нерівністю $K < k_{кр}$ де $k_{кр}$ - від'ємне число*

Для кожного критерію узгодження є відповідні таблиці, які дозволяють знайти таку точку $k_{кр}$, яка задовольняє потрібну умову.

При знаходженні критичної області доцільно враховувати потужність критерію.

Означення 8. ***Потужністю критерію*** *називають імовірність належності критерію критичній області при умові, що правильна альтернативна гіпотеза.*

Іншими словами, потужність критерію є імовірність того, що основна гіпотеза буде відхилена, якщо альтернативна гіпотеза правильна.

Якщо рівень значущості a вже обрано, то критичну область доцільно будувати так, щоб потужність критерію була максимальною. Виконання цієї вимоги забезпечує мінімальну імовірність похибки другого роду.

Зауваження 2. *Єдиний спосіб одночасного зменшення ймовірностей похибок першого та другого роду це є збільшення об'єму вибірки*.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

3. Що таке нульова й альтернативна гіпотези?
4. Що таке область прийняття гіпотези?
5. Що таке критична область?
6. Сформулювати алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези.
7. Що таке помилки першого та другого роду?

Тема 14. ЕЛЕМЕНТИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Для статистичної оцінки взаємозв'язків між явищами та їх істотності при невеликій кількості спостережень застосовують дисперсійний аналіз.

Дисперсійний аналіз — це метод оцінки впливу одного чи кількох факторів, що одночасно діють на певну результативну ознаку. Його застосовують під час статистичної обробки даних, одержаних унаслідок експерименту або спостереження, для виявлення впливу окремих факторів та їх взаємодії на рівень показників ефективності сільськогосподарського виробництва. Такий аналіз дає змогу кількісно характеризувати вплив на результативну ознаку різних факторів, навіть тих, які не виражаються числом, а належать до атрибутивних ознак. При цьому атрибутивні ознаки можна вивчати разом з кількісними.

Дисперсійний метод аналізу найчастіше використовують при розробці результатів багатоваріантних дослідів для загальної оцінки вірогідності розбіжностей у групових середніх, групуючи дані за однією чи кількома факторними ознаками, а також для визначення вірогідності взаємодії двох, трьох або більшої кількості факторів.

При дисперсійному аналізі досліджувані об'єкти зводять у дисперсійні комплекси. Вони становлять прості або комбіновані групування, в яких для кожного фактора виділяють щонайменше дві групи (градації). Залежно від кількості досліджуваних факторів дисперсійні комплекси бувають одно-, дво- і трифакторними.

На варіацію досліджуваних ознак впливають різноманітні фактори, які поділяють на систематичні та випадкові. У зв'язку із цим розрізняють варіацію систематичну та випадкову. **Систематична варіація** — це частина загальної варіації результативної ознаки, зумовлена систематичною дією факторних ознак (наприклад, різною родючістю ґрунтів, різними дозами внесених добрив, різним рівнем годівлі тварин тощо). **Випадкова варіація** — це частина загальної варіації результативної ознаки, зумовлена дією випадкових факторів. Випадкову варіацію часто називають **залишковою,** оскільки вона відображує варіацію результативної ознаки, зумовлену іншими причинами, не врахованими в обсязі систематичної варіації.

Суть дисперсійного аналізу — в розподілі загальної варіації досліджуваної ознаки на систематичну та випадкову (залишкову) і в порівнянні систематичної варіації з випадковою.

Обсяг варіації результативної ознаки в дисперсійному комплексі визначають сумами квадратів відхилень: загальною, міжгруповою (систематичною, факторною) і залишковою (випадковою). Діленням відповідної суми варіації на кількість ступенів свободи встановлюють загальну, міжгрупову та залишкову дисперсії.

Кількість ступенів свободи варіації характеризує кількість елементів сукупності, що вільно варіюють. Так, якщо на основі вибірки розрахована їх середня арифметична, то сукупність відхилень має n - 1 ступенів свободи. Кількість ступенів свободи завжди буде меншою на одиницю від кількості варіюючих величин, серед яких обчислена середня. Якщо сума 10 чисел дорівнює 50, то 9 з них можуть бути будь-які довільні, а десяте число буде фіксованим (як різниця між 50 і сумою 9 довільних чисел), тобто воно втрачає свою свободу.

Залишкову дисперсію, зумовлену дією випадкових факторів, при дисперсійному аналізі використовують як міру помилки спостереження. При цьому міжгрупову дисперсію порівнюють із залишковою. Якщо міжгрупова варіація істотно більша за залишкову, то це означає, що вона не випадкова, а зумовлена впливом фактора, що вивчається. Нормативом, з яким проводять порівняння для оцінки вірогідності відношення систематичної дисперсії до випадкової, є математичний критерій F, розроблений Р. Фішером:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому сутність дисперсійного аналізу?
2. Записати математичну модель для однофакторного дисперсійного аналізу.
3. Записати математичну модель для двофакторного дисперсійного аналізу.
4. Що таке рівень впливу певного фактора на досліджувану ознаку *X*?
5. Що називається внутрішньо груповою дисперсією.

Тема 15. ЕЛЕМЕНТИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Властивості статистичних оцінок параметрів парної функції регресії. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості. Множинна регресія.

1. Рівняння лінійної парної регресії

Нехай між змінними X та Y теоретично існує певна лінійна залежність. Це твердження може ґрунтуватися на тій підставі, наприклад, що кореляційне поле для пар (xi;yi) має такий вигляд як на рисунку.

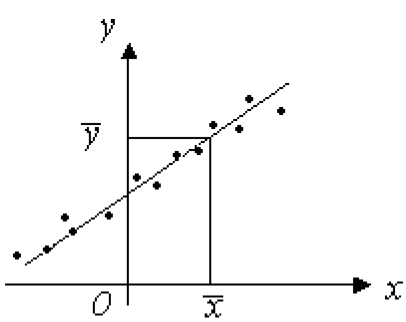


Рис. Кореляційне поле

Як бачимо, насправді між ознаками X і Y спостерігається не такий тісний в'язок, як це передбачає функціональна залежність. Окремі спостережувані значення у, як правило, відхилятимуться від передбаченої лінійної залежності під впливом випадкових збудників, які здебільшого є невідомими. Відхилення від передбаченої лінійної форми зв'язку можуть статися внаслідок неправильної специфікації рівняння, тобто ще з самого початку неправильно вибране рівняння, що описує залежність між X і Y.

Будемо вважати, що специфікація рівняння вибрана правильно. Ураховуючи вплив на значення Y збурювальних випадкових факторів, лінійне рівняння і зв'язку X і Y можна подати в такому вигляді:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \tag{15.1}$$

де β_0, β_1 є невідомі параметри регресії, ε_i є випадковою змінною, що характеризує відхилення у від гіпотетичної теоретичної регресії.

Отже, в рівнянні (15.1) значення «у» подається у вигляді суми двох частин: систематичної $\beta_0 + \beta_1 x_i$ і випадкової ε_i. Параметри β_0, β_1 є невідомими величинами, а ε_i, є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу з числовими характеристиками: M(ε_i) =0, D(ε_i) = σ_i^2 =const. При цьому ε_i є некорельованими.

У результаті статистичних спостережень дослідник дістає характеристики для незалежної змінної ***x*** і відповідні значення залежної змінної ***y***.

Отже, необхідно визначити параметри β_0, β_1. Але істинні значення цих параметрів дістати неможливо, оскільки ми користуємося інформацією, здобутою від вибірки обмеженого обсягу. Тому знайдені значення параметрів будуть лише статистичними оцінками істинних (невідомих нам) параметрів β_0, β_1. Ці оцінки позначимо β_0^*, β_1^*. Тоді моделі відповідатиме статистична оцінка

$$y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_i + \varepsilon_i. \tag{15.2}$$

2. Визначення параметрів β_0^*, β_1^*.

Якщо ми прийняли гіпотезу про лінійну форму зв'язку між ознаками X і Y, то однозначно вибрати параметри β_0^*, β_1^*, які є точковими статистичними оцінками відповідно для параметрів β_0, β_1, практично неможливо. І справді, через кореляційне поле можна провести безліч прямих. Тому необхідно вибрати такий критерій, за яким можна здійснити вибір параметрів β_0^*, β_1^*.

На практиці найчастіше параметри β_0^*, β_1^* визначаються за методом найменших квадратів, розробка якого належить К. Гауссу і П. Лапласу. Цей метод почали широко застосовувати в економіко-статистичних обчисленнях, відколи була створена теорія регресії.

Відповідно до цього методу рівняння лінійної парної регресії $y_i = \beta_0^* + \beta_1^* x_i$, необхідно вибрати так, щоб сума квадратів відхилень спостережуваних значень від лінії регресії була б мінімальною. З (15.2) знаходимо:

$$\varepsilon_i = y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* x_i)\,. \tag{15.3}$$

Як бачимо, величина ε_i є функцією від параметрів β_0^*, β_1^*. Ці параметри необхідно добирати так, щоб сума квадратів відхилень $\sum(\varepsilon_i)^2$ була мінімальною:

$$\sum(\varepsilon_i)^2 = \min\,.$$

Позначивши $\sum(\varepsilon_i)^2 = \theta(\beta_0, \beta_1)$, розглянемо необхідну умову існування мінімуму функції $\theta(\beta_0, \beta_1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta(\beta_0, \beta_1)}{\partial\beta_0} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial\theta(\beta_0, \beta_1)}{\partial\beta_0} = 0. \end{cases} \tag{15.4}$$

З (15.4) знаходимо

$$\beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x}\ ;$$

$$\beta_1^* = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2}\,.$$

Парний коефіцієнт кореляції визначається як

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\,.$$

Основна властивість парного коефіцієнта кореляції: $0 < r_{xy} < 1$.

3. Властивості β_0^*, β_1^*.

Статистичні оцінки параметрівпарної функції ренгресії β_0^*, β_1^* є незміщеними оцінками параметрів β_0, β_1, дійсно:

$$M(\beta_0^*) = \beta_0, \quad M(\beta_1^*) = \beta_1.$$

4. Множинна регресія

Визначення та кількісна оцінка взаємозв'язку між двома статистичними ознаками за допомогою парної кореляції є дійовим засобом статистичного аналізу. Проте соціально-економічні процеси та явища формуються під впливом не одного, а багатьох факторів. Наприклад, на урожайність сільськогосподарських культур впливають метеорологічні умови, кількість унесених добрив, сорт, строки сівби тощо. Продуктивність тварин залежить від рівня та якості годівлі, породи, способів утримання тварин, процесів відтворення стада тощо.

Кореляцію, за допомогою якої вивчається вплив на результативну ознаку двох та більше взаємозв'язаних факторних ознак, називають множинною. При вивченні множинної кореляції можна застосовувати як прямолінійні, так і криволінійні рівняння регресії.

Багатофакторні регресійні моделі дають змогу оцінювати вплив на досліджувану результативну ознаку кожного окремого із включених у рівняння факторів при фіксованому значенні (на середньому рівні) інших факторів. При цьому важливою умовою множинної кореляції є відсутність функціонального зв'язку між факторами.

Важливе значення при множинній кореляції має вибір форми зв'язку та відповідного математичного рівняння множинної регресії. Вибір типу функції має грунтуватися на теоретичному аналізі досліджуваного явища або на досвіді попередніх аналогічних досліджень. Ураховуючи, що будь-яку функцію багатьох змінних можна звести до лінійного типу логарифмуванням, рівняння множинної регресії частіше будують у лінійній формі.

Формула лінійного рівняння множинної регресії має такий вигляд:

$$y_x = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Окремі коефіцієнти регресії цього рівняння характеризують вплив відповідного фактора на результативний показник при фіксованому (елімінованому) значенні інших факторів. Вони показують, наскільки змінюється результативний показник при зміні відповідного фактора на одиницю. Вільний член рівняння (а0) не має економічного змісту та не інтерпретується.

Параметри рівняння множинної регресії обчислюють за методом найменших квадратів.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

5. Дати визначення статистичної залежності між ознаками X та Y .
6. Що означає кореляційна залежність між ознаками X та Y ?
7. Записати модель парної лінійної регресії ?
8. Чому дорівнює β_0^* ?
9. Чому дорівнює β_1^* ?
10. Які числові характеристики для β_0^* ?
11. Які числові характеристики для β_1^* ?
12. Який закон розподілу ймовірностей мають випадкові величини β_0^*, β_1^* для парної лінійної регресії ?
13. Який закон розподілу ймовірностей мають випадкові величини $\beta_0^* + \beta_1^* x_i$?

Тема 16. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ.

1. Випадкові процеси

Теорія випадкових процесів є математичною наукою, що вивчає закономірності випадкових подій у їх динаміці. Ця теорія (за іншою термінологією — теорія випадкових функцій) вивчає процеси, розвиток яких наперед точно неможливо передбачити. Така невизначеність (непередбачуваність) зумовлена дією випадкових факторів на розвиток процесу.

Математичною моделлю випадкового процесу є певна функція $X = X(t)$ від дійсного аргументу t, значення якої при кожному фіксованому t є випадковою величиною. Саме поняття випадкового процесу (випадкової функції) є узагальнюючим поняттям випадкової величини.

Отже, випадковим процесом $X = X(t)$ називають такий процес, коли при будь-якому можливому значенні $t = t_i$ випадкова функція $X = X(t_i)$ утворює випадкову величину.

При $t = t_i$ ми дістанемо випадкову величину, яку називають перерізом випадкового процесу. Чим більше перерізів буде розглянуто, тим детальніше уявлення ми будемо мати про випадковий процес.

Випадкові процеси можна класифікувати за тими чи іншими ознаками.

Елементарною класифікацією випадкових процесів є класифікація за ознаками часу та стану. Випадковий процес називають процесом із дискретною змінною часу, якщо система, в якій він здійснюється, може змінювати свій стан тільки в моменти часу $t_1, t_{2,} \dots$ кількість яких є обмеженою, або зліченною.

2. Марковські випадкові процеси. Ланцюги Маркова

Серед випадкових процесів, що широко застосовуються для створення стохастичних (імовірних) моделей, котрі описують процеси функціювання певних систем технічного , економічного, екологічного та соціального профілю, центральне місце належить марковським.

Випадковий процес X(t) називають марковським, якщо за будь-якого можливого значення часу $t = t_1$ значення випадкової величини $x(t_1)$ не залежить від того, яких значень ця величина набувала для $t < t_1$, тобто процес у момент часу $t = t_1$ не залежить від його поведінки в більш ранні моменти часу $t < t_1$.

Марковський процес X(t) називають однорідним, якщо закономірності його поведінки на будь-якому проміжку часу ΔT не залежать від розміщення цього інтервалу на часовій осі.

Нехай X(t) – однорідний марковський процес із обмеженим , або зліченим, числом можливих станів i =0,1,2,3,…,n,…

Якщо аргумент t набуває лише значення 0,1,2,3,…n, то в цьому разі матимемо послідовність переходів $x(0) \to x(1) \to x(2) \to x(3) \to \dots$

Такий процес послідовностей переходів називають ланцюгом Маркова.

При розробленні теорії ланцюгів Маркова часто дотримуються іншої термінології, а саме: розглядається певна фізична система S, яка в кожний момент часу може перебувати в одному з несумісних станів A_1, A_2, A_3,…A_k,…і змінювати свій стан лише в моменти часу t_1, t_2, t_3,… t_k,…

Процес переходу системи S утворює ланцюг Маркова, якщо ймовірність перейти в стан A_j в момент часу $t(t_k < t < t_{k+1})$залежить лише від того, в якому стані система перебувала в момент часу $t'(t_{k-1} < t' < t_k)$, і не залежить від стану системи в більш ранішні моменти часу.

Імовірність переходу зі стану A_i в стан A_j в момент часу t позначають через $p_{ij}(t)$.

Повна ймовірна картина всіх можливих переходів систем із одного стану в інший за умови, що число всіх станів дорівнює N, безпосередньо описується матрицею ймовірностей переходу

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots\dots & p_{1N}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots\dots & p_{2N}(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ p_{N1}(t) & p_{N2}(t) & \dots\dots & p_{NN}(t) \end{pmatrix}.$$

Якщо $p_{ij}(t)$ не залежить від часу, то ланцюг Маркова називають однорідним і тоді $p_{ij}(t) = p_{ij} = const$. А тому для однорідних ланцюгів Маркова матриця ймовірностей переходу набуває такого вигляду

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots\cdots & p_{2N} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots\cdots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

Для кожного рядка матриць виконується рівність

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1.$$

Матрицю π^n називають n –кроковою матрицею переходу з одного стану в інший.

3. Процес народження і загибелі

Один із важливих напрямів застосування ланцюгів Маркова — моделювання процесу народження і загибелі організмів. Цей процес може бути з дискретними або з неперервними змінами часу *t*. Його визначальною умовою є те, що переходи можливі лише в сусідні стани. Сутність марковського процесу в цьому разі полягає в тому, що він моделює зміни, котрі відбуваються в часі в певному об'ємі популяції, а саме — зміну числа одиниць певного виду організмів.

Такі процеси є надзвичайно зручними для математичного моделювання, що використовується для розв'язання задач теорії масового обслуговування (теорії черг).

Для процесу народження і загибелі допустимі лише переходи зі стану $\omega_к$ в стани $\omega_{к-1}$ або $\omega_{к+1}$

Якщо об'єм популяції дорівнює *к* одиниць, то процес популяції перебуває в стані $\omega_к$. Імовірність того, що система перебуває у стані $\omega_к$ позначається p_k.

Перехід зі стану $\omega_к$ у стан $\omega_{к+1}$ відповідає народженню одиниці виду організму, а перехід із $\omega_к$ в $\omega_{к-1}$ — загибелі одиниці організму. Події народження певного організму та його загибелі є незалежними і несумісними.

Процес зміни об’єму популяції в стаціонарному режимі можна подати системою рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n p_n + \mu_n p_n), \\ \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1. \end{cases} \quad (16.1)$$

Тут λ_n і μ_n - інтенсивності відповідно народження і загибелі одиниць популяції. Математична модель (16.1) застосовується в елементарній теорії масового обслуговування.

4. Елементи теорії масового обслуговування

Як у сфері виробництва, так і в побуті часто трапляються такі неприємні явища, як черга, що являє собою скупчення (яке буває численним) об'єктів (вимог), які чекають свого обслуговування. Під обслуговуванням об'єкта (вимоги) розуміють виконання стосовно нього (неї) певного комплексу операцій.

Черга може мати місце у повсякденному житті: у магазинах до кас чи до продавця, у поліклініці до лікаря. У виробничій практиці вона виникає під час виробничих процесів, коли накопичуються деталі, вузли, агрегати, які потребують обслуговування робітником, верстатом-автоматом. У більш складних системах обслуговування черги виникають під час навантажування чи розвантажування вагонів, річних та морських суден у портах, обслуговування літаків в аеропортах тощо. Причини, які призводять до черг як у сфері виробництва, так і в сфері обслуговування, мають випадковий характер і виникають тоді, коли:

1) пропускна здатність «приладу» обслуговування (робітник, касир, верстат-автомат) не задовольняє число вимог, що надходять;
2) об'єкти (вимоги) надходять нерегулярно, тобто у випадкові моменти часу, утворюючи при цьому пуассонівський потік;
3) час обслуговування об'єкта (вимоги) не є сталою величиною, а випадковою, і припускається, що вона має експоненціальний закон розподілу ймовірностей.

Математичною моделлю для найпростішої системи масового обслуговування з одним пуассонівським потоком і одним каналом обслуговування (одноканальний прилад), час якого має експоненціальний закон розподілу ймовірностей, є система рівнянь (16.1).

Розв'язуючи систему (16.1) послідовно, отримаємо:

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) p_0,$$

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1}\right) p_0, \qquad (16.2)$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{\mu_n \ldots \mu_1}\right) p_0 .$$

Значення p_0 знаходиться з рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають випадковим процесом?
2. Дати класифікацію випадкових процесів.
3. Що називають реалізацією випадкового процесу?
4. Що називають перерізом випадкового процесу?
5. Що називають функцією розподілу перерізу?
6. Функція розподілу двох перерізів.
7. Математичне сподівання перерізу випадкового процесу.
8. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення перерізу випадкового процесу X = x(().

4. **МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1.

Тема заняття. Основні поняття теорії ймовірностей.

Мета заняття: Закріпити теоретичні знання і набути практичні навички використання основних понять теорії ймовірностей в ході розв'язання практичних задач.

Обладнання: 1. Методичні рекомендації і завдання до практичних занять.
2. Мікрокалькулятори або ПК.
3. Контрольні завдання.

Методичні рекомендації

Для розв'язку задач у даній практичній роботі необхідно використовувати основні поняття і формули теорії ймовірностей.

Ймовірністю випадкової події *A* називається невід'ємне число *P(A)*, що дорівнює відношенню числа елементарних подій $m(0 \le m \le n)$, які сприяють появі *A*, до кількості всіх елементарних подій *n* простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0 \quad (m = 0)$.

Для вірогідної події $P(\Omega) = 1 \ (m = n)$.

Переставленням із *n* елементів називають такі впорядковані множини з *n* елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)n,$$

де *n* набуває лише цілих невід'ємних значень.

Розміщенням з *n* елементів по *m* називають такі комбінації, які складаються з з *m* елементів, взятих з даних *n* елементів ($m<n$) і які різняться між собою як порядком, так і елементами. Кількість розміщень з *n* елементів по *m* позначають A_n^m і обчислюють за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Комбінації, що складаються з m елементів, взятих з даних n елементів і які різняться між собою хоча б одним елементом називають сполученням з n елементів по m. Кількість таких множин

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, то така ймовірність називається умовною. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A \ / \ B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0.$$

У разі коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i, які утворюють повну групу і між собою є парно несумісними

$\left(B_i \bigcap B_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j =, \ldots, \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega \right)$, ймовірність події A

обчислюється за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \ P(A \ / \ B_i),$$

яка називається формулою повної ймовірності.

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p і q, то їх називають експериментами за схемою Бернуллі. У кожному експерименті випадкова подія з ймовірністю p відбувається, а з ймовірністю q – не відбувається, тобто $p + q = 1$.

Ймовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з'явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p(0 < p < 1)$, то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A настане m раз, подається такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається *функцією Гаусса.*

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p(0 < p < 1)$, то для великих значень n імовірність появи випадкової події від m_i до m_j раз обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m_n \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i),$$

де $x_j = \frac{m_j - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_i = \frac{m_i - mp}{\sqrt{npq}}$

При $n \to \infty,\ p \to 0$ за умови $np = a = const$ імовірність появи випадкової події m раз $(0 \le m \le n)$ обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-n},$$

яка називається *формулою Пуассона.*

Співвідношення, що встановляє зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями, називають *законом розподілу випадкової величини.*

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме: як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x)$$

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

звідки $dF(x) = f(x)dx.$

Математичним сподіванням випадкової величини *X*, визначеною на дискретному просторі Ω, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Якщо Ω - обмежена множина, то

$$M(X) = \sum_{s=1}^{n} x_i p_i.$$

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини *X* називається величина

$$M(X) = \int_{\Omega} xf(x)dx.$$

Дисперсією випадкової величини *X* називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для дискретної випадкової величини *X* дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i \ ;$$

для неперервної

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Приклади розв’язків задач

Приклад 1. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта — браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

А — три деталі виявляться стандартними;

В — усі три виявляться бракованими;

С — дві стандартні й одна бракована.

Розв'язання. Нехай A_i — поява стандартної, $\overline{A_i}$ — бракованої деталі при і-му вийманні.

Подія А = $A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$, В = $\overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2 \bigcap \overline{A}_3$,

С = $(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \overline{A}_3) \bigcup (A_1 \bigcap \overline{A}_2 \bigcap A_3) \bigcup (A_1 \bigcap A_2 \bigcap \overline{A}_3)$.

Оскільки випадкові події A_i і $\overline{A}_i$ є залежними, то:

$$P(A) = P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{9}{15}\frac{8}{14}\frac{7}{13} = \frac{12}{65};$$

$$P(\overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2 \bigcap \overline{A}_3) = \frac{6}{15}\frac{5}{14}\frac{4}{13} = \frac{4}{91}.$$

Приклад 2. Для прийому заліку викладач заготовив 50 задач: 20 задач з диференціального числення і 30 задач з інтегрального числення. Для здачі заліку студент має розв’язати першу ж навмання обрану задачу. Яка імовірність для студента здати залік, якщо він уміє розв’язати 18 задач з диференціального числення і 15 задач з інтегрального числення?

Нехай подія *A* означає, що задача розв’язана. Гіпотези B_1, B_2 це події, що обрана задача належіть диференціальному і інтегральному численням, відповідно. Імовірності гіпотез дорівнюють: $P(B_1) = 20/50 = 0{,}4$, $P(B_2) = 30/50 = 0{,}6$. А ймовірність розв’язати задачу за умови, що вона належіть диференціальному або інтегральному численням, відповідно, є:

$$P(A/B_1) = 18/20 = 0{,}9, \quad P(A/B_2) = 15/30 = 0{,}5.$$

Тепер за формулою повної ймовірності знаходимо: *P*(А)=0,4 * 0,9 + 0,6 * 0.5 = 0,66.

Приклад 3. Партія деталей виготовлена 3 робітниками , причому 1 робітник виготовив 25% усіх деталей, 2 - 35%, 3 - 40%. У продукції першого робітника брак складає 5 %, у продукції другого 4 % і в продукції третього 2 %. Випадково обрана для контролю деталь виявилася бракованою . Яка імовірність того, що вона виготовлено другим робітником .

Маємо :

$P(B_1) = 0{,}25$; $P(B_2) = 0{,}35$; $P(B_3) = 0{,}4$; $P(B_1/A) = 0{,}05$; $P(B_2/A) = 0{,}04$; $P(B_3/A) = 0{,}02$.

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}35 \bullet 0{,}04}{0{,}25 \bullet 0{,}05 + 0{,}35 \bullet 0{,}04 + 0{,}40 \bullet 0{,}02} = \frac{28}{69}.$$

Приклад 4. Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність того, що з п'яти електролампочок, увімкнених у електромережу не перегорять: 1) дві; 2) не більш, як дві; 3) не менш, як дві.

За умовою задачі маємо: p = 0,9; q = 0,1; n = 5; m = 2. Тоді дістанемо:

1) $P_5(2) = \frac{5!}{2!3!} 0.9^2\, 0.1^3$ = 10*0,81*0,001 = 0,0081;

2) $P_5(0 \le m \le 2) = \sum_{m=0}^{2} P_5(m) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = 0{,}00856;$

3) $P_5(2 \le m \le 5) = \sum_{m=2}^{5} P_5(m) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 0{,}99954.$

Приклад 5. У разі додержання певної технології 90% усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

Розв'язання. За умовою задачі n =200; p = 0,9; $q = 1 - p =$ 0,1. Використовуючи подвійну нерівність , дістаємо:

$$200 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 200 \cdot 0{,}9 + 0{,}9\,,$$

$$179{,}9 \le m_0 \le 180{,}9.$$

Завдання для самостійної роботи

Варіант 1

1. Кидають гральний кубик. Яка ймовірність випадання номера 4 на верхній грані кубика? Яка ймовірність випадання номера, більшого 4?
2. В одній шухляді 5 білих куль і 10 червоних, в інший — 10 білих і 5 червоних. Знайти ймовірність того, що хоча б з однієї шухляди буде витягнута одна біла куля, якщо з кожної шухляди витягнуто по одній кулі.

3. Мається дві однакових шухляди з кулями. У першій шухляді 2 білих кулі і 1 чорна, у другій — 1 біла і 4 чорних. Навмання вибирають одну шухляду і витягають з неї кулю. Яка ймовірність того, що витягнута куля виявиться білою?

4. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин заданий таблицею:

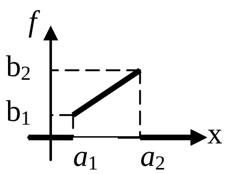
X / Y	2	5	7	9
- 2	0.1a	0.4a	0.3a	0.2a
3	a	0.5a	1.1a	2.1a
4	0.3a	0.1a	1.5a	a

Обчислити r_{xy} .

5. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 500 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,95. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події |X – M(X)| < ε, якщо ε =8.

Варіант 2

1. Кинуто два гральних кубика. Яка ймовірність випадання на двох кубиках у сумі не менш 9 очок? Яка ймовірність випадання одиниці принаймні на одному кубику?
2. У цеху працює 20 верстатів. З них 10 — марки А, 6 — марки *В* та 4 — марки *С.* Ймовірність того, що деталь виявиться якісною для цих верстатів відповідно 0,9, 0,8 і 0,7. Який відсоток якісних деталей випускає цех у цілому?
3. Студент знає не всі екзаменаційні білети. У якому випадку ймовірність витягти білет, що студент не знає, буде для нього найменшою: коли він тягне білет першим або останнім?
4. Щільність імовірності випадкової величини Х задано графічно:



$a_1 = 1$ $a_2 = 3{,}5$

$b_1 = 1{,}5$

Знайти b_2; побудувати графік *f(x)*; знайти середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 450 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,85. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 11$.

Варіант 3

1. При наборі телефонного номера абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи тільки, що ці цифри непарні і різні. Знайти ймовірність того, що номер був набраний правильно.

2. На заводі виготовляють комплектуючі деталі, перша машина робить 25% усіх виробів, друга — 35%, третя — 40%. Брак складає відповідно 5, 4 і 2%. а) Яка ймовірність того, що випадково обрана деталь має дефект? б) Випадково обрана деталь виявилася з дефектом. Яка ймовірність того, що вона була зроблена третьою машиною?

3. На станції відправлення мається 8 замовлень на відправлення товару: п'ять — усередині країни, а три — на експорт. Яка ймовірність того, що два обраних навмання замовлення виявляться призначеними для споживання усередині країни?

4. Випадкова величина X задана щільністю імовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: а) ймовірність улучення величини X в інтервал (-1; 1,5); б) дисперсію X.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 480 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,92. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 12$.

Варіант 4

1. У шухляді 10 червоних ґудзиків і 6 синіх. Навмання виймають два ґудзики. Яка ймовірність того, що ґудзики будуть одноколірними?

2. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів і двох інженерів. Планується створити підкомітет з його членів. Яка ймовірність того, що всі троє в підкомітеті будуть бухгалтери?
3. Підприємство має три джерела постачання комплектуючих — фірми А, *B, C.* На частку фірми А приходиться 50% загального обсягу постачань, *B* — 30% і *C* — 20%. З практики відомо, що 10% деталей, що поставляються фірмою А - браковані, відповідно *B* - *5%* і *C* - 6%. а) Яка ймовірність того, що узята навмання деталь отримана від фірми А? б) Яка ймовірність того, що узята навмання деталь, що виявилася бракованою, отримана від фірми А?

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність ймовірності f(x); б) ймовірність улучення величини X в інтервал (0; 2,5); в) ймовірність улучення величини X в інтервал (1; 3,5), г) дисперсію X.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 370 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,97. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $|X – M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 7$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2.

Тема заняття. Основні поняття математичної статистики.

Мета заняття: Закріпити теоретичні знання і набути практичні навички використання основних понять математичної статистики в ході розв’язання практичних задач.

Обладнання: 1. Методичні рекомендації і завдання до практичних занять.
2. Мікрокалькулятори або ПК.

3. Контрольні завдання.

Методичні рекомендації

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називають сукупність випадково взятих об'єктів.

Генеральною називають сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку.

Об'ємом сукупності (вибіркової або генеральної) називають кількість об'єктів цієї сукупності.

Перевірку статистичної гіпотези можна здійснити лише з використанням даних вибірки. Для цього слід обрати, деяку випадкову статистичну характеристику (вибіркову функцію), точний або наближений розподіл якої відомий, і за допомогою цієї характеристики перевірити основну гіпотезу.

Приклади розв’язків задач

Задача 1.

За заданим статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

Знайти:

1) $\bar{x}_B,\ D_B,\ \sigma_B$.

2) $Mo^*,\ Me^*$.

Розв’язання. Оскільки $n = \sum n_i = 100$, то

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 6{,}7, \quad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2 = 5{,}16,\ \sigma_B = \sqrt{D_B} = 2{,}27.$$

$$Mo^* = 6{,}5;\ 8{,}5, \quad Me^* = 6{,}5.$$

Задача 2.

Оцінки в балах x_i, одержані абітурієнтами на вступних іспитах з математики, наведені у вигляді дискретного розподілу:

x_i	15	25	35	45	55	65	75	85

n_i	5	10	15	20	25	15	8	2

Обчислити A_s^*.

Розв'язання.

$$n = \sum n_i = 100; \qquad \bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = 48{,}7;$$

$$\mu_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^3 n_i}{n} = -516{,}59; \qquad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2 = 275{,}31;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = 16{,}59; \qquad A_s^* = \frac{\mu_3}{\sigma_B^3} = -0{,}11.$$

Задача 3.

Залежність кількості масла y_i, що його споживає певна особа за місяць, від її одноденного заробітку в гривнях x_i, наведена в таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i, грн.	10,5	15,8	17,8	19,5	20,4	21,5	22,2	24,3	25,3	26,5
x_i, грн.	70	75	82	89	95	100	105	110	115	

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_i, грн.	28,1	30,1	35,2	36,4	37	38,5	39,5	40,5	41	42,5
x_i, грн.	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170

Потрібно обчислити K_{xy}^*, r_B.

Розв'язання. Оскільки обсяг вибірки $n = 20$, то маємо:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{70 + 75 + 82 + 89 + 100 + 105 + 110 + 115 + 120 + 125 + 130 + 135 +}{20}$$

$$\frac{+140 + 145 + 150 + 15 + 160 + 165 + 170}{20} = \frac{2436}{20} = 121{,}8;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} 28{,}63; \qquad \frac{\sum x_i^2}{n} = 15728{,}5;$$

$$D_x = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = 893{,}26; \quad D_y = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2 = 88{,}3;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = 29{,}89; \qquad \sigma_y = \sqrt{D_y} = 9{,}4;$$

$$K_{xy}^* = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 278; \quad r_B = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x \sigma_y} = 0{,}989.$$

Оскільки значення r_B близьке до одиниці, то звідси випливає, що залежність між кількістю масла, споживаного певною особою, та її одноденим прибутком майже функціональна.

Завдання для самостійної роботи

Вариант 1

Завдання 1. Результати вимірювання x_i подані у табл.:

x_i	1.5	1.8	2.3	2.5	2.9	3.3
n_i	2	3	5	8	3	3

З надійністю $\gamma = 0{,}99$ побудувати довірчий інтервал для $\bar{x}_Г$.

Завдання 2. Оцінки якості продукції у балах x_i за результатами опитувань серед споживачів, наведені у вигляді дискретного розподілу. Обчислити A_s^*.

x_i	18	28	38	48	58	68	75
n_i	42	32	20	16	10	5	2

Завдання 3. Щомісячний прибуток на підприємстві у розрахунку на одного робітника $X = x_i$ є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу $N(a; 4)$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність $H_0 : a = 235$, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : a > 235$, коли відомо що $\sigma_Г = 4$ і вибіркове середнє для 100 робітників дорівнює $\bar{x}_B = 221$.

Завдання 4. Залежність доходу підприємства y_i, від чисельності персоналу x_i, наведені в таблиці:

y_i	10	15	17	19	20	21	23	24
x_i	10	35	58	71	75	79	82	86

Потрібно: 1) побудувати кореляційне поле залежності ознаки Y від X; 2) визначити точкові незміщені статистичні оцінки β_0^*, β_1^*. 3) обчислити r_{xy}; 4) побудувати графік лінії регресії.

Завдання 5.

Досліджується залежність доходу 6 підприємств від суми інвестицій. Результати наведені в таблиці:

Рівень інвестицій	Доход					
A_1	19	12	26	12	20	28
A_2	25	35	32	25	30	24
A_3	30	38	30	58	48	34

При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ з’ясувати вплив інвестицій на доход.

Вариант 2

Завдання 1. Вимірявши прибуткову вартість 25 підприємств, знайшли вибіркову середню, що дорівнює 2,984. Із надійністю γ=0,99 побудувати довічний інтервал для середньої величини прибуткової вартості, якщо вибіркова дисперсія дорівнює 0,235.

Завдання 2. Оцінки якості продукції у балах x_i за результатами опитувань серед споживачів, наведені у вигляді дискретного розподілу:

x_i	19	29	39	49	59	69	76
n_i	43	33	21	17	11	6	3

Обчислити E_s^*.

Завдання 3.

За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки

x_i	– 2	1	3	5	7	9	11	13	15
n_i	4	6	7	10	14	15	20	10	3

Побудувати *F*(x)* і зобразити її графічно.

Завдання 4. Вимірювалась швидкість руху автомобілів на певній ділянці шляху. Результати

h = 2	16 - 18	18 - 20	20 - 22	22 - 24	24 - 26	26 - 28
n_i	3	8	19	29	4	2

вимірів наведено в таблиці. Визначити гіпотетично, який закон розподілу має ознака X – швидкість автомобіля. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити правильність сформульованої нульової гіпотези.

Завдання 5. Досліджується доход 6 підприємств від суми інвестицій. Результати наведені в таблиці:

Рівень інвестицій	доход					
A_1	30	6	32	4	36	4
A_2	48	14	42	15	41	12
A_3	72	58	65	74	82	61

При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ з'ясувати вплив інвестицій на доход.

Вариант 3

Завдання 1. Результати вимірювання x_i подані у табл.:

x_i	2.5	2.8	3.3	3.5	3.9	4.3
n_i	1	4	6	7	5	3

З надійністю $\gamma = 0{,}999$ побудувати довірчий інтервал для $\bar{x}_Г$.

Завдання 2. Оцінки якості продукції у балах x_i за результатами опитувань серед споживачів, наведені у вигляді дискретного розподілу. Обчислити A_s^*.

x_i	20	30	40	50	60	70	77
n_i	44	34	22	18	12	7	4

Завдання 3. Щомісячний прибуток на підприємстві у розрахунку на одного робітника $X = x_i$ є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу $N(a;4)$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність $H_0 : a = 435$, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : a \neq 435$, коли відомо що $\sigma_Г = 6$ і вибіркове середнє для 130 робітників дорівняє $\bar{x}_B = 421$.

Завдання 4. Залежність доходу підприємства y_i, від чисельності персоналу x_i, наведені в таблиці:

y_i	22	15	38	25	40	28	43	44
x_i	30	50	70	55	75	79	82	86

Потрібно: 1) побудувати кореляційне поле залежності ознаки Y від X; 2) визначити точкові незміщені статистичні оцінки β_0^*, β_1^*. 3) обчислити r_{xy} ; 4) побудувати графік лінії регресії.

Завдання 5. Досліджується доход 6 підприємств від суми інвестицій. Результати наведені в таблиці:

Рівень інвестицій	Доход					
A_1	20	14	26	15	22	23
A_2	26	36	32	27	32	24
A_3	34	39	30	52	48	36

При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ з'ясувати вплив інвестицій на доход.

Вариант 4

Завдання 1.

Вимірявши прибуткову вартість 27 підприємств, знайшли вибіркову середню, що дорівнює 3,948. Із надійністю γ=0,99 побудувати довічний інтервал для середньої величини прибуткової вартості, якщо вибіркова дисперсія дорівнює 0,252.

Завдання 2. Оцінки якості продукції у балах x_i за результатами опитувань серед споживачів, наведені у вигляді дискретного розподілу:

x_i	21	31	41	51	61	71	78
n_i	45	35	23	19	13	8	5

Обчислити E_s^*.

Завдання 3. За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки

h=2	3- 5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21
n_i	5	7	9	11	19	15	20	10	3

побудувати *F*(x)* і зобразити її графічно.

Завдання 4.

Вимірювалась швидкість руху автомобілів на певній ділянці шляху. Результати вимірів наведено в таблиці. Визначити гіпотетично, який закон

$h = 2$	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25	25 - 27	27 - 29
n_i	5	10	21	31	6	4

розподілу має ознака X – швидкість автомобіля. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити правильність сформульованої нульової гіпотези.

Завдання 5. Досліджується доход 6 підприємств від суми інвестицій. Результати наведені в таблиці:

Рівень інвестицій	Доход					
A_1	32	7	33	5	32	6
A_2	49	14	42	15	41	14
A_3	73	58	65	74	82	65

При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ з'ясувати вплив інвестицій на доход.

Література

Обов'язкова [1,3].

Додаткова [1]; [2].

5. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ДОМАШНЬОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання № 1.

Випадкові події A_1, A_2, A_3, A_4 є попарно несумісними і утворюють повну групу. Знайти $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$, коли відомо, що $P(A_1)=0{,}2P(A_2)$, $P(A_2)=0{,}8P(A_3)$, $P(A_3)=0{,}5P(A_4)$.

Розв'язання. Оскільки випадкові події A_1, A_2, A_3, A_4 є попарно несумісними і утворюють повну групу, то згідно з $P[{}^{n}U_{i=1}A_i]=1$ дістанемо:

$$P[{}^{4}U_{i-1}A_i]=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=1$$

За умовою задачі знаходимо:

$P(A_2)=0{,}8P(A_3)=0{,}8\cdot 0{,}5P(A_4)=0{,}4P(A_4)$;

$P(A_1)=0{,}2P(A_2)=0{,}2\cdot 0{,}4P(A_4)=0{,}08P(A_4)$;

Отже, $0{,}08P(A_4)+0{,}4P(A_4)+0{,}5P(A_4)+P(A_4)=1$;
$P(A_4)=1/(0{,}08+0{,}4+0{,}5+1)=1/1{,}98=100/198$;
$P(A_3)=0{,}5P(A_4)=(0{,}5\cdot 100)/198=50/198$;
$P(A_2)=0{,}4P(A_4)=(0{,}4\cdot 100)/198=40/198$;
$P(A_1)=0{,}08P(A_4)=(0{,}08\cdot 100)/198=8/198$.

Завдання № 2.

З урни, яка містить три білих та сім чорних куль беруть навмання послідовно дві кулі. Відомо, що перша куля біла (подія В). Яка ймовірність того, що друга куля також виявиться білою?

Розв'язок. Після здійснення першого випробування в урні залишилося дві білі та сім чорних куль. Шукана ймовірність, на підставі класичного означення ймовірності, дорівнює:

$$P\,(A\,/\,B) = \frac{2}{9}.$$

Для знаходження Р (А / В) скористаємося означенням умовної ймовірності. Ймовірність появи білої кулі при першому випробуванні $P(B)=\frac{3}{10}$.

Знайдемо ймовірність $P(A \cap B)$ того, що при першому й другому випробуванні з'явилися білі кулі.

Знайдемо загальну кількість елементарних подій:

$$n = A_{10}^2 = 10 * 9 = 90;$$

Знайдемо кількість елементарних подій у яких складається подія $A \cap B$:

$$m = A_3^2 = 3 * 2 = 6.$$

Тому $P(A \cap B) = \frac{m}{n} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15.}$

Отже $P\,(A\,/\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{15} \div \frac{3}{10} = \frac{2}{9}$.

Завдання № 3.

Перша фабрика виробила 3000 приладів, друга - 10000, третя - 1000 приладів. Перша фабрика випускає в середньому 1% бракованих приладів, друга - 05%, третя - 1,5%. Прилад вибраний навмання, виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей прилад виробила друга фабрика?

Розв'язок. Нехай подія В полягає у тому, що вибраний прилад бракований, подія H_i - у тому, що прилад вироблено на іншій фабриці, i=1, 2, 3. За умовою задачі потрібно знайти $P(H_2/B)$. Події H_i i=1, 2, 3, попарно незалежні. Вони утворюють повну групу подій.

За формулою Байєса:

$$P(H_2/B)=\frac{P(B/H_2)P(H_2)}{P(B/H_1)P(H_1)+P(B/H_2)P(H_2)+P(B/H_3)P(H_3)};$$

$$P(H_2)=\frac{10}{14};\quad P(H_3)=\frac{1}{14}\quad P(H_1)=\frac{3000}{3000+10000+1000}=\frac{3}{14}.$$

$$P(B/H_1)=0{,}01;\quad P(B/H_2)=0{,}005;\quad P(B/H_3)=0{,}015;$$

$$P(H_2/B)=\frac{0{,}005*\frac{10}{14}}{0{,}01*\frac{3}{14}+0{,}05*\frac{10}{4}+0{,}015*\frac{1}{14}}=\frac{10}{19}\approx 0{,}53.$$

Завдання 4.

Поданий закон розподілу випадкової величини.

Знайти її:

1) математичне сподівання;

2) дисперсію;

3) середнє квадратичне відхилення;

x	2	4	7	9
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Розв'язок.

M(x) = 2 * 0,1 + 4 * 0,3 + 7 * 0,4 + 9 * 0,2 = 0,2 + 1,2 + 2,8 + 1,8 = 6;

$D(x^2) = M(x^2) - [M(x)]^2$;

$M(x^2)$ = 4 * 0,1 + 16 * 0,3 + 49 * 0,4 * 81 * 0,2 = 0,4 + 4,8 + 19,6 + 16,2 = 41;

D(x)= $41-(6)^2=41-36=5$;   σ = $\sqrt{D(x)}=\sqrt{5}=2{,}24.$

Завдання 5.

Неперервна випадкова величина x подана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}\,(x-a), & a<x\le b,\\ 1 & x>b\,,\end{cases}\quad \text{a=1; b =8; c=3; d=7.}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{1}{7}(x-1), & 1<x\le 8\\ 1 & x>8\end{cases}\ .$$

Знайти:

1. Диференціальну функцію $f(x)$;

2. Побудувати графік $F(x)$ і $f(x)$;

3. Математичне сподівання x;

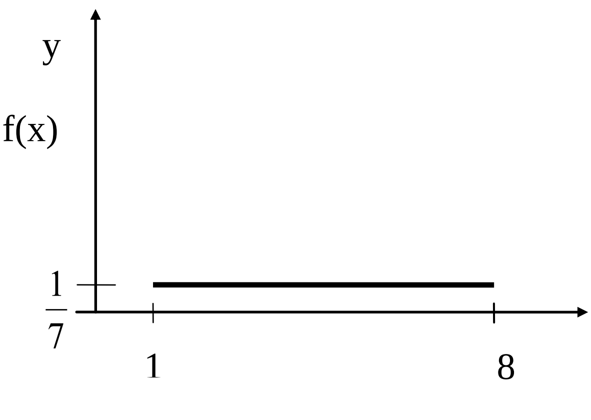
4. Ймовірність того, що x прийме значення, належне до інтервалу (c, d).

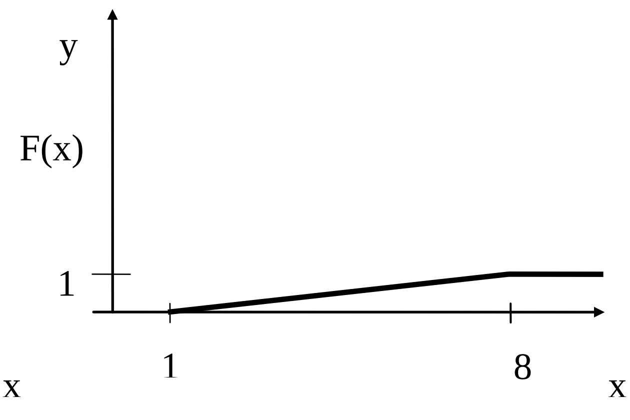
Розв'язок.

Знайдемо:

1. Диференціальну функцію $f(x)$: $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{1}{7} & 1<x\le 8\\ 0 & x>8\end{cases}$$

2. Побудуємо графік $F(x)$ і $f(x)$:





3. Математичне сподівання x:

$$M(x)=\int_1^8 xf(x)\,dx=\int_1^8 \frac{1}{7}x\,dx=\frac{1}{7}\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^8=\frac{x^2}{14}\Big|_1^8=\frac{1}{14}(64-1)=\frac{63}{14}.$$

4. Ймовірність того, що x прийме значення, що належить до інтервалу (c, d).

$$P(3<x<7)=F(7)-F(3)=\frac{1}{7}\left[(7-1)-(7-3)\right]=\frac{1}{7}(6-4)=\frac{2}{7}.$$

Завдання 6.

Задано щільність ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ A\sin x, & 0<x\le \pi/2; \\ 0, & x>\pi/2. \end{cases}$$

Обчислити A, $D(x)$, $\sigma(x)$. Знайти *Mo*.

Розв'язок.

$$A=\left[\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx\right]^{-1}=1;$$

$$M(X)=\int_0^{\pi/2} xf(x)dx=\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx=1.$$

$$M(X^2)=\int_0^{\pi/2} x^2 f(x)dx=\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx=\pi-2.$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\pi-3.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\pi-3}.$$

Функція $f(x)$ набуває максимального значення для $x=\dfrac{\pi}{2}$. Отже, *Mo*$=\dfrac{\pi}{2}$.

Завдання 7.

Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами *a*=10, $\sigma=5$. Знайти симетричний відносно *M(X)* інтервал, що містить виміряне значення з ймовірністю *p*=0,5.

Розв'язок.

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Отже, $P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$, Тоді $\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)=\dfrac{p}{2}=0{,}25$.

За таблицею для функції Φ дістанемо: $\dfrac{\delta}{\sigma}=0{,}675$, тоді $\delta=\sigma\cdot 0{,}675=3{,}4$.

Відповідь: (10-δ; 10+δ)=(6,6; 13,4).

Завдання 8.

Ймовірність появи випадкової події в кожній із 400 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon=10$.

Розв'язок. За умовою задачі маємо: $n=400$, $p=0,9$; $q=0,1$; $\varepsilon=10$.

$M(X)=n \cdot p=400 \cdot 0,9=360$; $D(X)=n \cdot p \cdot q=360 \cdot 0,1=36$.

$P(|x-360|<10) \geq 1-36/100=0,64$.

Завдання 9.

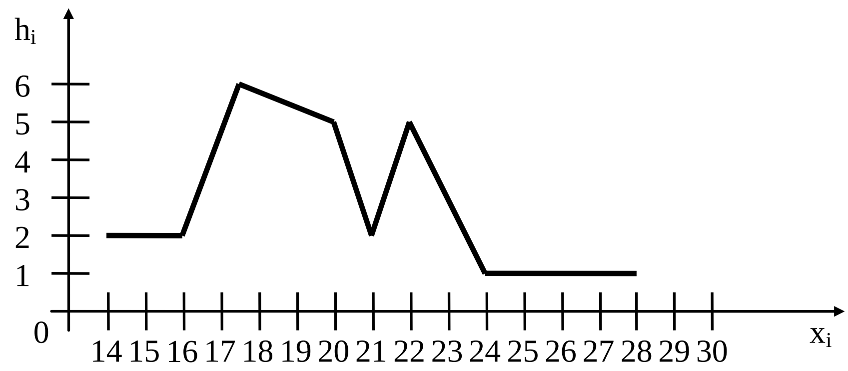
За поданими даними: 21, 20, 18, 14, 20, 16, 22, 22, 21, 20, 18, 14, 26, 18, 20, 16, 22, 28, 18, 24, 22, 18, 22, 20: скласти варіаційний ряд розподілу; побудувати: полігон частот; гістограму частот; емпіричну функцію розподілу.

Розв'язок.

I.

x_i	14	16	18	20	21	22	24	26	28
h_i	2	2	6	5	2	5	1	1	1

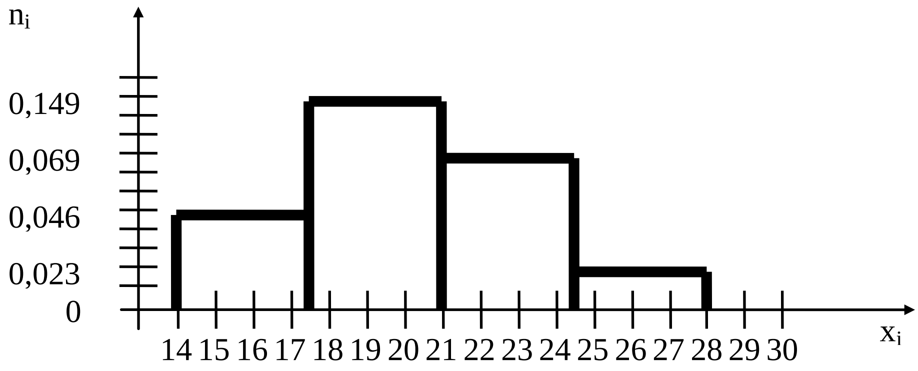
II а. Полігон частот



II б.

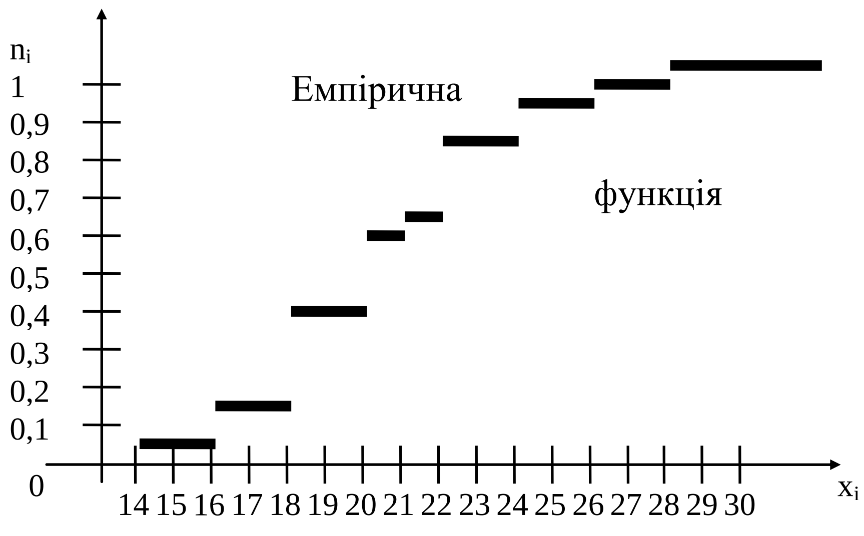
h = 3,5	h_i	Щільність частот
14 - 17,5	4	4 / 3,5 / 25 = 0,046
17,5 - 21	13	13 / 3,5 / 25 = 0,149
21 - 24,5	6	6 / 3,5 / 25 = 0,069
24,5 - 28	2	2 / 3,5 / 25 = 0,023

Гістограма



II в.

$x<14$	$h_i=0$
14-16;	$H_i=0{,}08$
16-18;	$H_i=0{,}16$
18-20;	$H_i=0{,}4$
20-21;	$H_i=0{,}6$
21-22;	$H_i=0{,}68$
22-24;	$H_i=0{,}88$
24-26;	$H_i=0{,}92$
26-28;	$H_i=0{,}96$
$x>28$	$h_i=1$



Завдання 10.

Вимірявши 40 випадково відібраних після виготовлення деталей, знайшли вибіркову середню, що дорівнює 15 см. Із надійністю γ=0,99 побудувати довічний інтервал для середньої величини всієї партії деталей, якщо генеральна дисперсія дорівнює 0,09 см^2.

Розв'язок. Для побудови довірчого інтервалу необхідно знати: $\bar{x}_B$, $\sigma_г$,

З умови задачі маємо: $x_в$=15 см, $\sigma_г=\sqrt{D_г}=\sqrt{0{,}09}$ см^2 =0,3, n = 40→$\sqrt{n}$= =$\sqrt{40}$=6,32. Величина x обчислюється з рівняння

$$\Phi(x)=0{,}5\gamma=0{,}5\cdot 0{,}99=0{,}495.$$

Φ(x)=0,495→x= 2,58 [за таблицею значень функції Лапласа].

Знайдемо числові значення довірчого інтервалу:

$\bar{x}_B-(\sigma_г\cdot x)/\sqrt{n}$ = 15- (0,3·2,58)/6,32=15- 0,12=14,88 см.

$\bar{x}_B+(\sigma_г\cdot x)/\sqrt{n}$= 15+(0,3·2,58)/6,32=15+0,12=15,12 см.

Таким чином, маємо: $14{,}88<\bar{X}_Г<15{,}12$.

Завдання 11.

Оцінки в балах x_i, одержані абітурієнтами на вступних іспитах з математики, наведені у вигляді дискретного розподілу:

x_i	15	25	35	45	55	65	75	85
n_i	5	10	15	20	25	15	8	2

Обчислити A_s^*.

Розв'язок.

$$n=\sum n_i=100, \qquad \bar{x}_B=\frac{\sum x_i n_i}{n}=48{,}7,$$

$$\mu_3=\frac{\sum (x_i-x_B)^3 n_i}{n}=-516{,}59, \quad D_B=\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}-(\bar{x}_B)^2=275{,}31.$$

$$\sigma_B=\sqrt{D_B}=16{,}59, \qquad A_s^*=\frac{\mu_3}{\sigma_B^3}=-0{,}11.$$

Завдання 12.

Дивись практичне заняття № 2.

Завдання 13.

Розбіжність вимірів діаметрів кульок $X = x_i$ є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу $N(a; 4)$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність

$H_0 : a = 240$мм, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : a > 240$мм,

коли відомо що $\sigma_Г = 4$ мм і вибіркове середнє значення виміряних у 100 однотипних кульок $\bar{x}_B = 225$мм.

Розв'язок. Оскільки $H_\alpha : a > 240$мм, будується правобічна критична область. Для знаходження критичної точки застосуємо вираз:

$$\Phi(z_{кр}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49.$$

Скористувавшись таблицею для функції Лапласа знаходимо $z_{кр} = 2{,}34$.

Обчислимо спостережуване значення критерію за формулою

$$z^* = \frac{\bar{x}_B - a}{\frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}} = -37{,}5.$$

Висновок. Оскільки $z^* \in [-\infty; 2{,}34]$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези $H_0 : a = 240$мм. Отже, нульова гіпотеза приймається.

6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ДОМАШНЬОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Згідно з робочим навчальним планом за дисципліною «Теорія ймовірностей та математичної статистики» слухачі виконують одну домашню контрольну роботу, яка за змістом охоплює самостійну та індивідуальну роботи.

Контрольна домашня робота виконується після вивчення відповідних теоретичних курсів та опанування рекомендованої літератури.

Контрольна робота складається з 17 варіантів. Варіанти рівноцінні за об'ємом і ступенем складності.

Виконана контрольна робота повинна бути оформлена відповідно до вимог, що викладені нижче, інакше вона може бути повернена на переоформлення.

Контрольну роботу слід оформити в зошиті у клітинку. У зошитах обов'язково слід залишати поля для виправлень та зауважень. Робота повинна бути виповнена чітко, акуратно, пастою темних кольорів.

Матеріал контрольної роботи повинен бути згрупований по завданням і приведений у порядку зростання номерів завдання. Слухач зобов'язаний вказати варіант, за яким виконується контрольна робота. Розділи контрольної роботи, відповідають різним завданням, повинні починатися з нової сторінки, структура кожного розділу повинна бути така:

1. Заголовок завдання.
2. Формулювання пункту завдання.
3. Відповідь на питання.

В кінці роботи необхідно дати перелік використаної літератури, поставити дату і підпис.

Вибір відповідного варіанту здійснюється студентом відповідно до номеру прізвища у журналі групи. Номеру варіанта відповідають номери задач по темам. Наприклад: варіант № 1, задачі 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1.... Перед виконанням завдань необхідно переглянути типові приклади розв'язку поданих задач.

Завдання 1.

1. Відомо, що $A_i \subset \Omega$ (i= 1. .... n). Чому дорівнює P$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \overline{A_2}\right)$?

2. Відомо, що $A_i \subset \Omega$ (i = 1, n). Чому дорівнює P $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \overline{A_2}\right)$?

3. Відомі значення P$(A \cap \overline{B})$=0,3; P$(B \cap \overline{A})$=0,4; P$(A \cap \overline{B})$=0,8. Знайти P$(A \cup B)$.

4. Відомо, що A_1, A_2, A_3, A_4 є між собою несумісними і утворюють повну групу. Знайти значення $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$, якщо:

$$P(A_1) = 0{,}5P(A_2) + 0{,}8P(A_3);$$
$$P(A_2) = 0{,}8P(A_3) + 0{,}2P(A_4);$$
$$P(A_3) = 0{,}8P(A_4).$$

5. Монета підкидається 20 раз. Яка ймовірність того, що при цьому герб з'явиться 7 або 17 раз?

6. На кожній із п'яти однакових карток написана одна із цифр 1. 2, 3. 4, 5. Навмання картки розкладають в один рядок. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

а) A - цифри на картках утворюють зростаючу послідовність;

б) B -спадну послідовність;

3) С - цифри 1, 2 розміщуватимуться в такій послідовності на початку рядка;

в) D - цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 — на останньому.

7. Виконується переставлення чисел 1. 2. 3 ... 10. Знайти ймовірність того, що числа 1) 1, 2; 2) 1, 2, 3, 4 будуть розміщені в наведеному порядку.

8. Задано множину цілих чисел $'\Omega=\{1,2,3,4,5\}$. Числа навмання розміщують у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому утвориться парне п'ятицифрове число?

9. Маємо тринадцять однакових карток, на яких написані літери: {Е, Е, А, А, Е, І, П, Д, Л, Л, Р, П, П}. Картки навмання розкладають у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо слово «паралелепіпед».

10. Задана множина цілих чисел $'\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Яка ймовірність того, що навмання взяті чотири числа, розміщені в рядок, утворять число 1936?

11. Числа 1,2,3,4,5 написані на п'яти однакових картках. Навмання послідовно по одній вибирають три картки й розкладають їх у рядок. Яка ймовірність того, що при цьому утвориться парне трицифрове число?

12. Дев'ять пасажирів навмання розміщуються у трьох вагонах. Обчислити ймовірність таких випадкових подій: 1) A — у кожному вагоні виявиться по три пасажири; 2) B — у першому вагоні виявиться 4 пасажири, у другому — 3 і в третьому — 2 пасажири.

13. В урні міститься 4 червоних, 5 синіх і 6 зелених кульок. Навмання із урни беруть три кульки. Яка ймовірність того, що вони виявляться одного кольору або всі три будуть мати різні кольори?

14. В урні міститься 20 кульок, пронумерованих відповідно від 1 до 20. Кульки із урни виймають по одній із поверненням. Таким способом кульки виймалися 10 раз. Яка ймовірність того, що номери кульок утворять зростаючу послідовність?

15. Підкидається n штук гральних кубиків. Обчислити ймовірність таких випадкових подій: 1) A — сума випадкових цифр дорівнюватиме n ; 2) B— сума цифр, що випали, дорівнюватиме $n + 1$.

16. 20 студентів, серед яких 10 чоловічої статі, а решта — жіночої, навмання групуються в пари. Яка ймовірність того, що кожна пара складається зі студентів різної статі?

17. У бригаді робітників 5 чоловіків і 10 жінок. Яка ймовірність того, що навмання розбиваючи їх на 5 груп по три чоловіки, у кожній із них виявиться один чоловік.

Завдання 2.

1) Тричі підкидають монету. Яка ймовірність того, що при третьому підкиданні випаде герб, якщо відомо, що при першому та другому підкиданні випав герб?

2) Для контролю якості продукції одного заводу з кожної партії готових деталей беруть 100. Перевірку не витримують в середньому вісім деталей. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь цього заводу буде не бракована? Скільки приблизно буде бракованих деталей в партії із 10000 штук?

3) Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадають на різні місяці року.

4) З урни, що містить три білих і чотири чорнх кулі, навмання взято одну. Яка ймовірність того, що ця куля: а) біла; б) чорна?

5) Радгосп одержує 40% тракторів із м. Харкова. Яка ймовірність того, що навмання вибраний трактор виготовлено не в м. Харкові?

6) Є два однакових ящика з кулями. У першому ящику дві білі і одна чорна куля, в другому — одна біла і чотири чорні кулі. Навмання виибирають один ящик і з нього вибирають одну кулю. Яка ймовірність того, що куля виявиться білою?

7) У цеху працює 15 верстатів. З них п’ять марки А, шість марки В, чотири марки С. Ймовірність того, що вироблена деталь відповідає стандарту, для цих верстатів відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7. Який відсоток стандартних деталей випускає цех у цілому?

8) На фабриці виробляються болти. Перша машина виробляє 20%, друга — 40%, третя — 35% усієї продукції. У їхній продукції брак становить відповідно 5%, 4% і 2%. Навмання взятий болт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він зроблений першою машиною?

9) Для участі у студентських відбіркових змаганнях виділено з першої групи п’ять, з другої — шість, з третьої — сім студентів. Ймовірність того, що студент першої, другої та третьої груп увійде в збірну курсу, дорівнює відповідно 0,9, 0,8, 0,7. Навмання вибраний студент за результатами змагання увійшов у збірну курсу. До якої групи найбільш ймовірно належить студент?

10) Перша фабрика виробила 1000 приладів, друга — 2000, третя — 3000 приладів. Перша фабрика випускає в середньому 1% бракованих приладів, друга — 0,5%, третя — 1%. Прилад, вибраний навмання, виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей прилад виробила друга фабрика?

11) Три незалежно працюючих ехолоти повідомляють про появу косяка риби. Ймовірність того, що при появі косяка риб спрацює перший, другий, третій ехолот, дорівнюють 0,8, 0,7, 0,9 відповідно. Відомо, що два ехолоти не спрацювали. Знайти ймовірність того, що при появі косяка риби не спрацювали другий і третій ехолоти.

12) Для перевірки на схожість льону було посіяно 200 насінин, з яких 180 проросло. Яку величину можна взяти за ймовірність схожості льону? Яка в середньому кількість насінин зійде з кожних 1000 посіяних?

13) У групі спортсменів 25 лижників, 10 велосипедистів, 4 бігуни. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму така: для лижника — 0,9; для велосипедиста — 0,75; для бігуна — 0,8. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний спортсмен виконає норму.

14) Деталі виробляються на двох заводах, об'єм продукції другого заводу в n раз перевищує об'єм продукції першого. Доля браку на першому заводі p_1, на другому p_2. Навмання взята деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона випущена на другому заводі?

15) З 60 питань екзаменаційних білетів студент підготував 50. Яка ймовірність того, що витягнутий студентом білет, який має два питання, буде складатися з підготовлених ним питань?

16) Монета підкидається 7 разів. Знайти ймовірність можливих появ "герба".

17) Гральний кубик підкидають 7 разів. Знайти ймовірність того, що три рази з'явиться число очок, кратне 3.

Завдання 3.

1. Спостереженнями встановлено, що в деякій місцевості у вересні буває 12 дощових днів. Яка імовірність того, що з випадково узятих у цьому місяці восьми днів три дні виявляться дощовими?

2. Що ймовірніше виграти в рівносильного супротивника (нічийний результат партії виключений): три партії з чотирьох чи п'ять з восьми?

3. Виріб деякого виробництва містять 5% браку. Знайдіть ймовірність того, що серед п'яти узятих навмання виробів: а)немає жодного зіпсованого; б)два зіпсованих.
4. Ймовірність одержання гарного результату при проведенні маркетингових досліджень дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайти найвірогіднішу кількість вдалих досліджень, якщо загальна їхня кількість дорівнює 7.
5. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515, а дівчинки — 0,485.У деякій родині шестеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед них не більше двох дівчинок.
6. Ймовірність того, що будь-який абонент подзвонить на комутатор у плині години, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів. Яка ймовірність того, що в плині години подзвонять п'ять абонентів?
7. Існує група, що складається з 500 чоловік. Знайти ймовірність того, що в двох чоловік день народження у фіксований день дорівнює 1/365.
8. Ймовірність появи успіху в кожнім іспиті дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що при 300 іспитах успіх наступить: а)рівно 75 разів; б)рівно 85 разів.
9. Яка ймовірність того, що в стовпчику зі ста навмання відібраних монет, розташованих “гербом” нагору, буде від 45 до 55?
10. Виробництво дає 1% браку. Яка ймовірність того, що з узятих на дослідження 1100 виробів бракованих буде не більш 17?
11. Ймовірність появи успіху в кожнім з 625 незалежних іспитів дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що частота появи успіху відхилиться по абсолютній величині від його ймовірності не більше ніж на 0,04.
12. У перші класи повинно бути прийнято 200 дітей. Визначити ймовірність того, що серед них виявиться 100 дівчинок, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.
13. Кинуто дві гральні кісти. Яка ймовірність випадання на двох кістах у сумі не менш 9 окулярів? Яка імовірність випадання одиниці принаймні на одній кісті?
14. З п'яти карток з буквами А, Б, В, Г, Д навмання одну за іншою вибирають три і розташовують у ряд у порядку появи. Яка імовірність того, що вийде слово "ДВА"?
15. Дитина грає з чотирма буквами розрізної абетки: А, А, М, М. Яка імовірність того, що при випадковому розташуванні букв у ряд він одержить слово "МАМА"?

16. При наборі телефонного номера абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи тільки, що ці цифри непарні і різні. Знайти імовірність того, що номер був набраний правильно.
17. У партії з 50 виробів 5 бракованих. З партії вибирають навмання 6 виробів. Визначити імовірність того, що з 6 виробів 2 виявляться бракованими.

Завдання 4.
Поданий закон розподілу випадкової величини *X*.
Знайти її:
1) математичне сподівання;
2) дисперсію;
3) середнє квадратичне відхилення;

1.

x	2	4	5	7
p	0.1	0.3	0.4	0.2

2.

x	1	3	6	10
p	0.1	0.3	0.35	0.25

3.

x	1.5	2	2.5	3
p	0.1	0.6	0.2	0.1

4.

x	3	5	8	10
p	0.2	0.1	0.5	0.2

5.

x	1	2	4	7
p	0.2	0.1	0.5	0.2

6.

x	2	5	8	12
p	0.5	0.2	0.1	0.2

7.

x	6	8	15	17
p	0.6	0.1	0.2	0.1

8.

x	1	3	6	9
p	0.1	0.6	0.2	0.1

9.

x	3	5	8	10
p	0.2	0.1	0.5	0.2

10.

x	1	2	4	7
p	0.2	0.1	0.5	0.2

11.

x	2	5	8	12
p	0.5	0.2	0.1	0.2

12.

x	2	4	5	7
p	0.1	0.3	0.4	0.2

13.

x	2	5	8	12
p	0.5	0.2	0.1	0.2

14.

x	1	3	6	9
p	0.1	0.6	0.2	0.1

15.

x	1.5	2	2.5	3
p	0.1	0.6	0.2	0.1

16.

x	4	7	8	9
p	0.3	0.4	0.2	0.1

17.

x	2	4	5	8
p	0.2	0.1	0.5	0.2

Завдання 5.

Неперервна випадкова величина *x* подана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,.\\ 1 & x>b\end{cases}$$

Знайти:

1) диференціальну функцію $f(x)$;

2) побудувати графік $F(x)$ і $f(x)$;

3) математичне сподівання x;

4) ймовірність того, що x прийме значення, належне до інтервалу (c, d).

№ задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	2	3	3	5
b	5	8	7	10	7	6	8	9	12	11	9	8	9	7	7	9	9
c	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	2	3	3	5	4
d	8	7	10	7	6	8	9	12	11	9	8	9	7	7	9	9	8

Завдання 6.

Задано щільність ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ A\left|x-a\right| & a<x\le b,\\ 0 & x>b.\end{cases}$$

Обчислити A, $D(x)$, $\sigma(x)$. Знайти Mo.

№ задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	2	3	3	5
b	5	8	7	10	7	6	8	9	12	11	9	8	9	7	7	9	9

Завдання 7.

Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами a=10, $\sigma = 5$. Знайти симетричний відносно *M(X)* інтервал, що містить виміряне значення з ймовірністю *p*.

№ задачі	1	2	3	4	5	6
p	0,9974	0,9956	0,9948	0,9988	0,9872	0,9852

№ задачі	7	8	9	10	11	12
p	0,9774	0,9756	0,9748	0,9788	0,9772	0,9752

№ задачі	13	14	15	16	17
p	0,9574	0,9556	0,9548	0,9588	0,9572

Завдання 8.

Ймовірність появи випадкової події в кожній із 400 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює *p*. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події |X – M(X)| <ε, якщо ε=10.

№ задачі	1	2	3	4	5	6
p	0,9974	0,9956	0,9948	0,9988	0,9872	0,9852

№ задачі	7	8	9	10	11	12
p	0,9774	0,9756	0,9748	0,9788	0,9772	0,9752

№ задачі	13	14	15	16	17
p	0,9574	0,9556	0,9548	0,9588	0,9572

Завдання 9.

За поданими даними:

1. Скласти варіаційний ряд розподілу.
2. Побудувати:

* полігон частот;
* гістограму частот;
* емпіричну функцію розподілу.

I варіант	**II варіант**	**III варіант**	**IV варіант**	**V варіант**
14	10	22	100	50
16	18	30	115	70
18	16	34	105	60
12	12	18	120	80
20	18	42	100	40
22	14	38	130	90
24	20	26	115	60
20	16	42	110	80
18	14	46	95	70
22	18	30	115	50
20	16	38	110	70
24	12	30	105	80
16	24	22	120	90
22	16	50	135	100
20	16	36	105	40
14	18	34	110	60
20	14	26	95	70
22	20	30	115	80
24	26	38	120	120
16	16	34	100	80
26	22	34	115	90
22	20	30	120	100
20	16	26	90	56
22	20	42	110	60
16	18	34	105	80
VI варіант	**VII варіант**	**VIII варіант**	**IX варіант**	**X варіант**
15	11	23	101	51
17	19	31	116	71
19	17	35	106	61
20	13	19	121	81
21	19	43	101	41
23	15	39	131	91
25	21	27	116	61
21	17	43	111	81
19	15	47	96	71
23	19	31	116	51
21	17	39	111	71

24	13	31	106	81
17	25	23	121	91
23	17	51	136	101
21	17	37	106	41
15	19	35	111	61
21	15	27	96	71
23	21	31	116	81
25	27	39	121	121
17	17	35	101	81
26	23	35	116	91
27	21	31	121	101
21	17	27	91	57
23	21	43	111	61
17	19	35	106	81
XI варіант	**XII варіант**	**XII варіант**	**XIV варіант**	**XV варіант**
16	11	23	101	51
18	19	31	116	71
20	17	35	106	61
21	13	19	121	81
22	19	43	101	41
24	15	39	131	91
26	21	27	116	61
22	17	43	111	81
20	15	47	96	71
24	19	31	116	51
22	17	39	111	71
25	13	31	106	81
18	25	23	121	91
24	17	51	136	101
22	17	37	106	41
16	19	35	111	61
22	15	27	96	71
24	21	31	116	81
26	27	39	121	121
18	17	35	101	81
27	23	35	116	91
28	21	31	121	101
22	17	27	91	57
24	21	43	111	61
18	19	35	106	81
XVI варіант	**XVII варіант**			
17	24			
19	32			

21	36
22	20
23	44
25	40
27	28
23	44
21	48
25	32
23	40
26	32
19	24
25	52
23	38
17	36
23	28
25	32
27	40
19	36
28	36
29	32
23	28
25	44
19	36

Завдання 10.

Вимірявши n випадково відібраних після виготовлення деталей, знайшли вибіркову середню, що дорівнює q см. Із надійністю γ=0,97 побудувати довічний інтервал для середньої величини всієї партії деталей, якщо генеральна дисперсія дорівнює 0,11 см^2.

№ задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	41	43	39	38	37	42	44	35	36
q	16	17	18	20	21	19	22	23	15

№ задачі	10	11	12	13	14	15	16	17
n	41,5	43,5	39,5	38,5	37,5	42,5	44,5	35,5
q	16	17	18	20	21	19	22	23

Завдання 11.

Оцінки в балах x_i, одержані абітурієнтами на вступних іспитах з математики, наведені у вигляді дискретного розподілу:

1 варіант	x_i	16	26	36	46	56	66	76
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
2 варіант	x_i	17	27	37	47	57	67	77
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
3 варіант	x_i	18	28	38	48	58	68	78
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
4 варіант	x_i	19	29	39	49	59	69	79
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
5 варіант	x_i	13	23	36	46	56	66	76
	n_i	6	11	16	26	14	5	10
6 варіант	x_i	17	27	37	47	57	67	77
	n_i	6	11	16	26	14	5	10
7 варіант	x_i	14	24	34	44	54	64	74
	n_i	7	11	16	26	14	5	10
8 варіант	x_i	19	29	39	49	59	69	79
	n_i	8	11	16	26	14	5	10
9 варіант	x_i	11	21	31	41	51	61	71
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
10 варіант	x_i	17	27	37	47	57	67	77
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
11 варіант	x_i	18	28	38	48	58	68	78
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
12 варіант	x_i	19	29	39	49	59	69	79
	n_i	5	11	16	26	14	5	10
13 варіант	x_i	13	23	36	46	56	66	76
	n_i	6	11	16	26	14	5	10
14 варіант	x_i	17	27	37	47	57	67	77
	n_i	6	11	16	26	14	5	10
15 варіант	x_i	14	24	34	44	54	64	74
	n_i	7	11	16	26	14	5	10
16	x_i	19	29	39	49	59	69	79

варіант	n_i	8	11	16	26	14	5	10
17 варіант	x_i	14	24	34	44	54	64	74
	n_i	8	18	19	28	18	8	17

Обчислити A_s^*.

Завдання 12.

Залежність кількості масла y_i, що його споживає певна особа за місяць, від її одноденного прибутку в гривнях x_i, наведена в таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i, грн.	10,5	15,8	17,8	19,5	20,4	21,5	22,2	24,3	25,3	26,5
x_i, грн.	70	75	82	89	95	100	105	110	115	120

i	11	12	13	14	15	16	17
y_i, грн.	28,1	30,1	35,2	36,4	37	38,5	39,5
x_i, грн.	125	130	135	140	145	150	155

Потрібно обчислити K_{xy}^*, r_B.

Завдання 13.

Розбіжність вимірів діаметрів кульок $X = x_i$ є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу $N(a; 4)$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність $H_0 : a = A$, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : a > A$, коли відомо що $\sigma_\Gamma = 4$мм і вибіркове середнє значення виміряних у 100 однотипних кульок дорівнює $\bar{x}_B$.

№ задачі	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	235	237	238	239	241	242	243	244	245,3
$\bar{x}_B$	221	224	245	250	233	241	267	275	231

№ задачі	10	11	12	13	14	15	16	17
A	224	226	227	229	221	222	223	224
$\bar{x}_B$	231	234	235	230	238	231	237	255

Завдання 14.

Залежність розчинності y_i тіосульфату від температури x_i наведено парним статистичним розподілом вибірки. Потрібно:

1. Побудувати кореляційне поле залежності ознаки Y від X;
2. Визначити точкові незміщені статистичні оцінки β_0^*, β_1^*.
3. Обчислити r_{xy}; побудувати графік лінії регресії.

1 варіант		2 варіант		3 варіант		4 варіант	
y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i
10	60	10.5	61	11	60	10	60
15	65	15.5	64	16	65	15	65
17	68	17.5	67	18	68	17	68
19	71	19.5	72	18.5	71	19	71
20	75	20.5	75	21	75	20	75
21	77	21.5	77	22	77	21	77
22	79	22.5	79	23	79	22	79
23	84	23.5	84	24	84	23	84
14	86	14.5	86	19	86	14	86
25	88	25.5	88	25.5	88	25	88
5 варіант		6 варіант		7 варіант		8 варіант	
y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i
10,6	61	10,4	62	11	60	10,1	60,2
15,6	64	15,4	65	16	65	15,1	65,2
17.6	67	17,4	68	18	68	17,1	68,2
19,6	70	19,4	73	18.5	71	19,1	71,2
20,6	75	20,4	74	21	75	20,1	75,2
21,6	76	21,4	78	22	77	21,1	77,2
22,6	78	22.4	78	23	79	22,1	79,2
23,6	83	23,4	85	24	84	23,1	84,2
14,6	85	14,4	87	19	86	14,1	86,2
25,6	87	25,4	89	25.5	88	25,1	88,2
9 варіант		10 варіант		11 варіант		12 варіант	
y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i
11	62	11.5	63	12	58	12	59
15	65	15.5	64	16	65	15	65
17	68	17.5	67	18	68	17	68
19	71	19.5	72	18.5	71	19	71

20	75	20.5	75	21	75	20	75
21	77	21.5	77	22	77	21	77
22	79	22.5	79	23	79	22	79
23	84	23.5	84	24	84	23	84
14	86	14.5	86	19	86	14	86
25	88	25.5	88	25.5	88	25	88
13 варіант		14 варіант		15 варіант		16 варіант	
y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i
10,3	61,3	10,2	62,1	11,7	60,4	10,3	59,2
15,6	64	15,4	65	16	65	15,1	65,2
17.6	67	17,4	68	18	68	17,1	68,2
19,6	70	19,4	73	18.5	71	19,1	71,2
20,6	75	20,4	74	21	75	20,1	75,2
21,6	76	21,4	78	22	77	21,1	77,2
22,6	78	22.4	78	23	79	22,1	79,2
23,6	83	23,4	85	24	84	23,1	84,2
14,6	85	14,4	87	19	86	14,1	86,2
25,6	87	25,4	89	25.5	88	25,1	88,2

17 варіант	
y_i	x_i
9,9	60,2
15,3	65,4
17,1	68,2
19,1	71,4
20,1	75,2
21,4	77,4
22,4	79,2
23,4	84,4
14,4	86,2
25,1	88,4

7. ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ

Питання з теорії курсу

"Теорія ймовірностей та математична статистика"

1. Поняття випадкового процесу. Прості та складені випадкові події.
2. Операції над подіями.
3. Класичне означення імовірностей.
4. Основні формули комбінаторики.
5. Геометрична ймовірність.

6. Статистична ймовірність.
7. Залежні та незалежні випадкові події. Умовна ймовірність.
8. Теорема складання ймовірностей несумісних подій.
9. Теорема складання ймовірностей сумісних подій.
10. Теорема множення ймовірностей для залежних подій.
11. Теорема множення ймовірностей для незалежних подій.
12. Формула повної ймовірності.
13. Формула Байєса.
14. Формула Бернуллі.
15. Найімовірніше число появи випадкової події.
16. Локальна теорема Лапласа.
17. Інтегральна теорема Лапласа.
18. Використання інтегральної теореми.
19. Формула Пуассона.
20. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закони розподілу їх ймовірностей.
21. Функція розподілу ймовірностей та її властивості.
22. Щільність ймовірностей та її властивості.
23. Математичне сподівання.
24. Властивості математичного сподівання.
25. Мода та медіана.
26. Дисперсія та середньоквадратичне відхилення.
27. Властивості дисперсії.
28. Початкові та центральні моменти.
29. Асиметрія і ексцес.
30. Система двох дискретних випадкових величин.
31. Закон розподілу ймовірності дискретної двомірної величини.
32. Коефіцієнт кореляції та його властивості.
33. Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин та її властивості.
34. Щільність розподілу двомірної випадкової величини.
35. Основні числові характеристики системи двох неперервних випадкових величин (X,Y).
36. Ймовірність влучення випадкових точок у прямокутник.
37. Функція 1-ого випадкового аргументу.
38. Математичне сподівання функції 1-ого випадкового аргументу.
39. Функції 2-х випадкових аргументів.

40. Математичне сподівання суми двох випадкових аргументів.
41. Біноміальний розподіл.
42. Закон розподілу неперервної випадкової величини. Рівномірний розподіл.
43. Нормальний розподіл.
44. Правило трьох сигм для нормального закону.
45. Геометричний закон.
46. Розподіл χ^2.
47. Математичне сподівання і дисперсія при нормальному розподілу.
48. Ймовірність влучення в заданий інтервал при нормальному розподілі.
49. Математичне сподівання і дисперсія при показовому розподілі.
50. Ймовірність влучення в заданий інтервал при показовому розподілі.
51. Показовий розподіл.
52. Елементи математичної статистики. Вибірковий метод.
53. Емпірична функція розподілу.
54. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності. Статистичні гіпотези.
55. Точкові статистичні оцінки.
56. Інтервальні статистичні оцінки.
57. Нульова й альтернативна гіпотези.
58. Область прийняття гіпотези. Критична область.
59. Алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези.
60. Помилки першого та другого роду.
61. Елементи дисперсійного аналізу. Однофакторний дисперсійний аналіз.
62. Двофакторний дисперсійний аналіз.
63. Елементи теорії регресії і кореляції.
64. Рівняння лінійної парної регресії. Коефіцієнт кореляції.
65. Визначення, властивості та довірчі інтервали для параметрів β_0^*, β_1^*.
66. Множинна лінійна регресія.

8. **СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

Обов’язкова література

1. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Ч. 1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2008. – 304 с.
2. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Ч. 2. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2008. – 336 с.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА,- 2010. - 543 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.. – М.: Высшее образование,- 2008. - 404 с.

Додаткова література

1. Гахман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - Киев: Вища школа.- 1989. - 408 с.
2. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. - Л.: ЛГУ.- 1997. - 332 с.
3. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей.- М.: МГУ. -1992. - 230 с.

Навчальна література

Рядно Олександр Андрійович

Теорія ймовірностей та математична статистика

Навчально-методичний посібник

У 45 **Теорія ймовірностей та математична статистика:** Навчально-методичний посібник для слухачів, які навчаються за освітньо-кваліфікаційним рівнем «спеціаліст» у галузі знань 0305 “Економіка та підприємництво” за спеціальністю 7.03050801 “Фінанси і кредит”./: Укладач О.А. Рядно. – Дніпропетровськ: Дніпропетровська державна фінансова академія, 2012.- 106 с.

Навчально-методичний посібник й розроблений за програмою з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», затвердженою ректором Дніпропетровської державної фінансової академії у 2012 році, і має на меті надання допомоги слухачам в отриманні необхідної системи знань з дисципліни “ Теорія ймовірностей та математична статистика ”. Він містить рекомендації до практичних занять. Самостійної роботи, індивідуальні завдання, список рекомендованої літератури.

ББК 22.1
УДК 338:519

Підписано до друку _____________ Формат 80 х 108 $^{1}/_{32}$ Папір крейдяний
Умов. друк. арк. 5,6 Обл.- від. арк. 7,6 Тираж ____ Замовлення ________

РВВ ДДФА Дільниця оперативного друку. Св. Держкомітету інформ. політики, телебачення та радіомовлення сер. ДК 2126 від 17.03.2005 р.

Видавець і виготівник: Дніпропетровська державна фінансова академія, вул. Аржанова, 12, м. Дніпропетровськ, 49083