УДК 519.7

Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, А.В. Давыдова, Д.В. Евдокимов,
Ю.А. Малая, М.А. Стояновский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Аннотация. Работа посвящена преодолению вычислительных трудностей, неизбежно возникающих при исследовании температурных полей и тепловых потоков в тонких теплозащитных покрытиях тел сложной геометрической формы. Таковые трудности, прежде всего, происходят из различия геометрических масштабов теплозащитного покрытия и защищаемого им тела, а также являются следствием сложной геометрической формы защищаемого тела. Для преодоления сложностей, связанных с малой толщиной покрытия построена асимптотическая математическая модель поля температур в нем, а для облегчения процедур расчета температурных полей в телах сложной геометрической формы предложено использовать метод граничных элементов. Полученные результаты могут быть использованы в разнообразных отраслях науки и техники, например, энергетике, ракетно-космической технике, металлургической и химической промышленности, коммунальной сфере.

Ключевые слова: теплозащитное покрытие, температурный режим, асимптотический метод, метод граничных элементов, энергосбережение.

Введение

В последние десятилетия мировая экономика развивается в условиях тяжелого перманентного энергетического кризиса. Данное обстоятельство сделало энергосбережение, в том числе и теплосбережение, одной из главных тенденций развития современных техники и технологий. В современной теплотехнике существуют два подхода к решению данной задачи. Первый из них – так называемая активная система терморегуляции, основанная на подводе тепла к (отводе тепла от) объекту терморегуляции. Второй путь называется пассивными системами терморегуляции и сводится к тепловой изоляции регулируемого объекта. Конечно, первый путь намного более универсален, чем второй, но высокие цены на энергоносители и явная тенденция их дальнейшего роста делают второй из вышеназванных подходов все более привлекательным для использования. Речь идет об очень широком спектре температур, в частности, одним из побудительных мотивов написания настоящей статьи стали исследования эффективных систем поддержания температурного режима баков с криогенным топливом, используемых в ракетно-космической технике, а другим – результаты работ авторов по тепловой защите спускаемых аппаратов ракетно-космических систем, то есть, спектр температур охватывает практически весь диапазон, с которым имеет дело современная теплотехника.

Зачастую, особенно в авиации и ракетно-космической технике, к теплозащитным покрытиям предъявляется требование минимального веса, что соответствует малым толщинам теплозащитного слоя. То есть, в системе защищаемый объект – теплоизоляция можно естественным образом ввести малый параметр, как отношение их характерных размеров. После введения малого параметра переход к асимптотической математической модели выполняется стандартными методами. Что же касается температурного поля защищаемого объекта, то оно, в первую очередь, зависит от природы этого объекта и подлежит расчету именно с учетом особенностей таковой природы. Применение асимптотической математической модели решает проблему разномасштабных процессов теплопроводности в теплозащитном покрытии и защищаемом теле. Однако защищаемое тело может иметь, вообще говоря, произвольную геометрическую форму. С вычислительной точки зрения сложная форма области решения влечет нетривиальные трудности, уровень которых таков, что рассматриваемую проблему областей сложной формы считают одной из самых серьезных проблем современной вычислительной математики. В настоящее время подавляющее большинство прикладных численных расчетов проводятся при помощи двух основных численных методов – метода конечных разностей и метода конечных элементов. Но именно сложная форма области решения заставила рассмотреть в настоящей работе метод граничных элементов как одно из основных средств вычислительного инструментария. Как правило, сравнение количественных и качественных параметров алгоритмов, относящихся к разным методам, оказывается малорезультативным. К сожалению, задачи такого уровня сложности, как рассматриваемая в настоящей работе, не допускают построения тестовых задач и с большим трудом поддаются исследованию при помощи задач модельных. То есть, выбор эффективного численного метода для расчета поля температур защищаемого тела, имеющего сложную геометрическую форму, представляет собой нетривиальную проблему вычислительной математики. В целом же, очевидна актуальность настоящей работы не только для задач энергосбережения и регулирования температурных режимов, но и для развития вычислительной математики.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими задачами

Основная теоретическая научная проблема, рассматриваемая в настоящей работе, заключается в разработке высокоточных и высокоэффективных расчетных схем для численного решения многомасштабных нелинейных задач теории теплопроводности в областях сложной геометрической формы в связи с проблематикой пассивной тепловой защиты. Совершенно очевидна связь теоретических аспектов рассматриваемой тематики с основными направлениями развития современной вычислительной математики. Практическая сторона работы напрямую связана с проблематикой энергосбережения и может быть отнесена к весьма значительному числу как национальных, так и международных программ, направленных на экономию энергоресурсов и преодоление энергетического кризиса.

Анализ последних достижений и публикаций по тематике исследования

Вопросы тепловой защиты в современной постановке приведены в книгах Ю. В. Полежаева и соавторов [1–3]. Вопросы применения асимптотических методов в задачах теплопроводности к настоящему времени хорошо изучены [4–6]. Однако в указанных монографиях речь о тонких теплозащитных покрытиях не шла вовсе, а основное внимание уделялось тонкому телу. Во многих работах прикладного плана предполагалось, что поле температур в теплозащитном покрытии является стационарным и изменяется только поперек покрытия, что соответствует нулевому приближению в асимптотических разложениях, однако использование такого приближения не получило надлежащего обоснования.

Следует также отметить, что в работах [1–3] не анализировалось поле температур защищаемого объекта. Учет процессов тепломассообмена в защищаемом объекте и их совместный анализ с температурными полями в теплозащитном покрытии относит задачу теплозащиты к сопряженным задачам теории тепломассообмена [7], однако рассмотрение сопряженной задачи в области сложной геометрической формы представляет собой весьма нетривиальную вычислительную проблему, заслуживающую отдельного исследования. Первым исследованием, в котором был использован асимптотический подход для теплозащитного покрытия совместно с методом конечных разностей для расчета поля температур в защищаемом теле, была статья [8]. Если основным объектом исследования в работе [8] была нестационарная, одномерная по пространству сопряженная задача теплопроводности, то в статье [9] была рассмотрена плоская стационарная задача. Среди главных выводов статьи [9] содержится заключение о целесообразности применения для решения такого класса задач метода граничных элементов [10, 11], обладающего рядом специфических достоинств по сравнению с другими численными методами [12]. Настоящая работа является прямым логическим продолжением и обобщением работы [9] на случай нелинейных, нестационарных плоских и пространственных задач. В таком случае метод граничных элементов уже не всегда является наилучшим выбором для численного моделирования, и для каждого частного случая метод граничных элементов следует сравнивать [12] с методами конечных разностей [13] и конечных элементов [14].

Цель работы

Основываясь на вышеизложенном, цель настоящей работы можно сформулировать следующим образом: разработка новых и совершенствование существующих методов количественного анализа сложных тепломассообменных систем, включающих неасимптотически тонкие теплоизолирующие покрытия.

Основной материал исследования. Математическая модель

Математическое описание объекта исследования начнем с построения асимптотической математической модели поля температур в неасимптотически тонком теплозащитном покрытии, следуя общей схеме работы [9], но для нестационарного пространственного случая. Сделаем ряд упрощающих замечаний. Во-первых, считаем покрытие гладким как с внутренней, так и с внешней стороны. Во-вторых, не будем здесь рассматривать покрытие с волнистой или ребристой внутренней и внешней поверхностью, а также всевозможными резкими выступами и углублениями. Наконец, в-третьих, материал покрытия предполагаем однородным и изотропным с теплофизическими свойствами, зависящими только от температуры, а само покрытие считаем однослойным. Обозначив теплофизические параметры, относящееся к покрытию индексом «1», запишем следующее уравнение теплопроводности:

$$c_1(T_1)\rho_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = div(\lambda_1(T_1) grad T_1), \tag{1}$$

где T_1 – температура покрытия, c_1 – его теплоемкость, ρ_1 – его плотность, λ_1 – его теплопроводность, τ – время, векторные операторы *div* и *grad* понимаются в общепринятом смысле. Переходя к локальной системе координат, в которой одна из характерных поверхностей рассматриваемого покрытия (внутренняя, внешняя или срединная поверхность) является координатной поверхностью (ξ_2, ξ_3), обезразмерим уравнение (1) обычным способом [9], но с учетом наличия двух геометрических масштабов. Обозначив их через L_1 и L_2, введем:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{L_1},\ \bar{\xi}_2 = \frac{\xi_2}{L_2},\ \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_3}{L_2}; \tag{2}$$

 ISSN 1562-9945

$$\bar{c}=\frac{c}{c^0},\ \bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho^0},\ \bar{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda^0}, \tag{3}$$

где в качестве c^0, ρ^0 и λ^0 удобно использовать первые слагаемые из часто применяемых полуэмпирических соотношений:

$$\begin{aligned} c(T)&=c^0+c^1T+c^2T^2+\ldots,\\ \rho(T)&=\rho^0+\rho^1T+\rho^2T^2+\ldots,\\ \lambda(T)&=\lambda^0+\lambda^1T+\lambda^2T^2+\ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

Число Фурье удобно определить как

$$Fo=\frac{\tau a^0}{L_2^2},\ a^0=\frac{\lambda^0}{c^0\rho^0}. \tag{5}$$

Введем малый параметр ε следующим образом

$$\varepsilon=\frac{L_1^2}{L_2^2}, \tag{6}$$

и обезразмеренную некоторым образом температуру θ_1. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{c}_1(\theta_1)\bar{\rho}_1(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial Fo}\varepsilon&=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_1}\left(\bar{\lambda}_1(\theta_1)\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\bar{\xi}_1}\right)+\\ &+\frac{\varepsilon}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_2}\left(\bar{\lambda}_1(\theta_1)\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\theta_1}{\partial\bar{\xi}_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_3}\left(\bar{\lambda}_1(\theta_1)\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\theta_1}{\partial\bar{\xi}_3}\right)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

где H_1, H_2, H_3 – соответствующие коэффициенты Ляме. В дальнейшем черточки над обезразмеренными величинами будем опускать, чтобы избежать громоздкости формул. Согласно методу малого параметра решение уравнения (7) будет отыскиваться в виде ряда [4–6, 8, 9]

$$\theta_1=\theta_{10}+\theta_{11}\varepsilon+\theta_{12}\varepsilon^2+\ldots. \tag{8}$$

Подставим представление (8) в уравнение (7) и, приравнивая суммы коэффициентов при одинаковых степенях ε, получим:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\lambda_1(\theta_{10})\frac{\partial\theta_{10}}{\partial\xi_1}\right)=0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\lambda_1(\theta_{10})\frac{\partial\theta_{11}}{\partial\xi_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{d\lambda_1}{d\theta}(\theta_{10})\theta_{11}\frac{\partial\theta_{10}}{\partial\xi_1}\right)\right]=c_1(\theta_{10})\rho_1(\theta_{10})\frac{\partial\theta_{10}}{\partial Fo}-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\lambda_1(\theta_{10})\frac{\partial\theta_{10}}{\partial\xi_2}\right)+\right. \tag{10}$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\lambda_1(\theta_{10})\frac{\partial\theta_{10}}{\partial\xi_3}\right)\right],$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

Как правило, уравнения, следующие за (10), чересчур громоздки, а поскольку решение уравнений (9) и (10) согласно разложению (8) обеспечивает погрешность порядка ε^2, что в силу (6) достаточно мало, то особенного интереса такие уравнения не представляют. Найдем первый интеграл дифференциального уравнения (9)

$$\lambda_1(\theta_{10})\frac{\partial\theta_{10}}{\partial\xi_1}=\frac{d_1H_1}{H_2H_3}\Rightarrow\int\lambda_1(\theta_{10})d\theta_{10}=d_1\int\frac{H_1}{H_2H_3}d\xi_1. \tag{11}$$

Если $\lambda_1(\theta_{10})$ задано соотношением (4), то вычисление интеграла в левой части совершенно элементарно. Вычисление интеграла в правой части также не должно вызвать особых затруднений. Интегрирование уравнения (10) несколько сложнее, но не ведет к непреодолимым трудностям. Уравнение (9) может быть далее упрощенно, если коэффициенты Ляме разложить в ряды по ε. Но параметр ε входит в такое разложение в степени $1/2$, что снижает точность подхода.

На внешней границе теплозащитного покрытия могут быть поставлены любые из традиционных граничных условий теории тепломассообмена, в частности, условия первого

$$T_1\big|_{\Gamma_{out}}=T_a, \tag{12}$$

второго

$$\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{out}}=q_a \tag{13}$$

или третьего рода

$$\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{out}} = \alpha\left(T_1\big|_{\Gamma_{out}} - T_a\right). \qquad (14)$$

Обезразмеривание условий (12)–(14) и дальнейшая подстановка в них разложения (8) очевидны и подробно рассмотрены в работе [9], поэтому ограничимся обезразмериванием условия (12):

$$\theta_{10}\big|_{\Gamma_{out}} = \theta_a(Fo),\ \theta_{11}\big|_{\Gamma_{out}} = 0,\ \theta_{12}\big|_{\Gamma_{out}} = 0.... \qquad (15)$$

Начальные условия для уравнения (1) следует сформулировать также традиционным образом

$$T_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\big|_{\tau=0} = T_1^0(\xi_1,\xi_2,\xi_3). \qquad (16)$$

Однако время явным образом не входит ни в уравнение (9), ни в левую часть уравнения (10) и левые части последующих уравнений. Зависящие от времени функции из граничных условий входят в решение уравнения (9) как параметры, непосредственной связи с начальными условиями в системе (9), (10), ... вообще не просматривается. Подобная ситуация не содержит внутреннего противоречия. Тонкость теплозащитного покрытия подразумевает, что его суммарная теплоемкость мала по сравнению с суммарной теплоемкостью защищаемого тела, то есть, поле температур теплозащитного покрытия устанавливается очень быстро, и время, измеряемое в характерных масштабах времени защищаемого тела, оказывается асимптотически большим для теплозащитного покрытия. Поскольку в качестве защищаемого тела может оказаться практически любая среда, то математической моделью тепломассообмена в такой среде может быть любая из большинства математических моделей современного тепломассообмена. Никак не претендуя на рассмотрение подобного разнообразия, авторы настоящей работы предпочли бы остановиться на некоторых актуальных в технике и технологиях частных случаях:

1. Тепловая защита баков с криогенной жидкостью. Несмотря на применение теплоизоляции на внутренней поверхности бака происходит кипение криогенного компонента топлива, что является крайне нежелательным явлением по многочисленным причинам. При кипении криогенного топлива температура на внутренней поверхности покрытия Γ_{in} равна температуре фазового перехода, то есть,

$$T_1\big|_{\Gamma_{in}} = T_{ф.п.}. \tag{17}$$

Очевидно, что данное условие полностью аналогично условию (12), и расчета поля температур внутри массы топлива не требуется.

2. Стационарное пространственное поле температур твердого защищаемого тела $\left(\dfrac{\partial T_2}{\partial \tau} = 0\right)$. Этот случай является обобщением плоского случая, рассмотренного в работе [9]. Поле температур описывается уравнением эллиптического типа

$$div(\lambda_2(T_2) grad T_2) = q, \tag{18}$$

где индекс«2» указывает на принадлежность к защищаемому телу, а q – интенсивность возможных источников/стоков тепла. Граничные условия сопряжения должны быть поставлены хотя бы на части границы Γ_{12}:

$$T_1\big|_{\Gamma_{12}} = T_2\big|_{\Gamma_{12}}; \;\; \lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{12}} = \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{12}}. \tag{19}$$

Поскольку уравнение (18) допускает очевидную линеаризацию, описанную в работе [9], то для решения сформулированной для этого уравнения краевой задачи однозначно следует рекомендовать метод граничных элементов [10, 11].

3. Твердое теплопроводное защищаемое тело. В этом случае, если теплофизические свойства материала защищаемого тела постоянны, то для решения соответствующих краевых задач следует использовать метод граничных элементов. Но в случае нелинейных свойств материала авторы настоящей работы рекомендовали бы обратиться к методу конечных элементов [14], который лучше метода граничных элементов работает с нелинейными задачами, но в то же время менее чувствителен к сложности формы области, чем метод конечных разностей [13].

4. Случай постоянной по пространству температуры защищаемого тела. Данный случай предполагает, что защищаемое тело является жидким или газообразным и внутри него идут интенсивные процессы перемешивания (вынужденная конвекция). Имеем

$$c\frac{dT_2}{d\tau} = \int_{\Gamma_2} \lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial n} dS, \tag{20}$$

ISSN 1562-9945

где c – некоторая интегральная теплоемкость. Граничные условия на внутренней поверхности теплозащитного покрытия

$$T_1\big|_{\Gamma_{in}} = T_2. \tag{21}$$

5. Защищаемый объект со свободной и вынужденной конвекцией. Именно к этому классу относятся наиболее важные случаи применения теплозащитных покрытий, однако в подобных случаях основная трудность состоит уже в расчете свободной и вынужденной конвекции в области весьма сложной геометрической формы, для таких течений может быть рекомендован метод конечных элементов [14].

Анализ полученных результатов

В настоящей работе получены три группы теоретических результатов: 1. Асимптотическая математическая модель (9), (10), … 2. Семейство аналитических решений (11). 3. Результаты анализа алгоритмических особенностей расчета температур в защищаемом теле.

Теоретические и прикладные значения первых двух групп результатов совершенно очевидны в силу их аналитического характера. Что же касается третьей группы, то входящие в нее выводы и рекомендации носят, скорее, качественный характер и основаны на опыте работы авторов, а не на теоретическом или вычислительном анализе. Причиной тому являются сложность математических моделей и невозможность сформулировать тестовые задачи для сравнения эффективности различных численных методов. Обеспечение достоверности полученных численных результатов свелось к пересчетам всех численных примеров на удвоенных сетках, результаты каковых никогда не разнились более чем на 1%.

Выводы и анализ перспектив дальнейших исследований

Основной вывод о целесообразности применения асимптотических математических моделей для расчета неасимптотически тонких теплозащитных покрытий подтверждается всеми результатами настоящей работы, равно как и предыдущими работами авторов. В то же время обнаружена неоднозначность выбора средств численного анализа температурных полей защищаемого объекта: в ряде случаев предпочтение следует отдать методу граничных элементов, а в некоторых случаях – методу конечных элементов.

Перспективы дальнейших исследований относятся к двум направлениям: 1. Усложнение свойств теплозащитных покрытий: рассмотрение многослойных покрытий, покрытий из композитных материалов, пористых покрытий и т. д. 2. Рассмотрение новых случаев защищаемых объектов и рациональный выбор расчетных схем для них.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полежаев Ю. В. Тепловая защита / Ю. В. Полежаев, Ф. Б. Юревич. – М.: «Энергия», 1976. – 392 с.

2. Панкратов Б. М. Взаимодействие материалов с газовыми потоками / Б. М. Панкратов, Ю. В. Полежаев, А. К. Рудько. – М.: Машиностроение, 1975. – 224 с.

3. Полежаев Ю. В. Тепловое разрушение материалов / Ю. В. Полежаев, Г. А. Фролов. – К.: Изд-во ИПМ НАНУ, 2005. – 288 с.

4. Федоткин И. М. Асимптотические методы в задачах тепломассопереноса: / И. М. Федоткин, А. М. Айзен. – К.: Наукова думка, 1975. – 252 с.

5. Зино И. Е. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости / И.Е. Зино, Э.А. Тропп. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.

6. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: “Высшая школа”, 1982. – т. 1. – 327 с., т. 2. – 304 с.

7. Шеремет М. А. Сопряженные задачи естественной конвекции / М. А. Шеремет. – М.: Lambert, 2012. – 168 с.

8. Евдокимов Д. В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д. В. Евдокимов, Д. Н. Ивасишина, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – с. 141-156.

9. Бразалук Ю. В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, О. А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56.

10. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

 ISSN 1562-9945

11. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

12. Евдокимов Д. В. Анализ тенденций развития современного математического и численного моделирования / Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей, Н. В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету, №8, серія «Моделювання», Випуск 1, 2009. – С. 5-17.

13. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

14. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542 с.

REFERENCES

1. Polezhaev Yu. V. Teplovaya zaschita / Yu. V. Polezhaev, F. B. Yurevich. – M.: «Energiya», 1976. – 392 s.

2. Pankratov B. M. Vzaimodeystvie materialov s gazovyimi potokami / B. M. Pankratov, Yu. V. Polezhaev, A. K. Rudko. – M.: Mashinostroenie, 1975. – 224 s.

3. Polezhaev Yu. V. Teplovoe razrushenie materialov / Yu. V. Polezhaev, G. A. Frolov. – K.: Izd-vo IPM NANU, 2005. – 288 s.

4. Fedotkin I. M. Asimptoticheskie metodyi v zadachah teplomassoperenosa: / I. M. Fedotkin, A. M. Ayzen. – K.: Naukova dumka, 1975. – 252 s.

5. Zino I. E. Asimptoticheskie metodyi v zadachah teorii teploprovodnosti i termouprugosti / I.E. Zino, E.A. Tropp. – L.:Izd-vo Leningr. un-ta,1978.– 224s.

6. Belyaev N. M. Metodyi teorii teploprovodnosti / N. M. Belyaev, A. A. Ryadno. – M.: "Vyisshaya shkola", 1982. – t. 1. – 327 s., t. 2. – 304 s.

7. Sheremet M. A. Sopryazhennyie zadachi estestvennoy konvektsii / M. A. Sheremet. – M.: Lambert, 2012. – 168 s.

8. Yevdokymov D. V. Analiz teploprovodnosti v neasimptoticheski tonkom sloe / D. V. Yevdokymov, D. N. Ivasishina, A. A. Kochubey, N. V. Polyakov // Dyferentsialni rivniannia ta yikh zastosuvannia. – Dnipropetrovsk: DNU, 2006. – s. 141-156.

9. Brazaluk Iu. V. Ob odnoy zadache teorii teploizolyatsii / Iu. V. Brazaluk, A. I. Gubin, D. V. Yevdokymov, O. A. Kovalenko // Sistemnyie tehnologii.

Regionalnyiy mezhvuzovskiy sbornik nauchnyih rabot. – Vyipusk 3 (104). – Dnepropetrovsk, 2016. – S. 45-56.

10. Benerdzhi P. Metod granichnyih elementov v prikladnyih naukah / P. Benerdzhi, R. Batterfild. – M.: Mir, 1984. – 494 s.

11. Brebbiya K. Metodyi granichnyih elementov / K. Brebbiya, Zh. Telles, L. Vroubel. – M.: Mir, 1987. – 524 s.

12. Yevdokymov D. V. Analiz tendentsiy razvitiya sovremennogo matematicheskogo i chislennogo modelirovaniya / D. V. Yevdokymov, A. A. Kochubey, N. V. Polyakov // Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu, №8, seriia «Modeliuvannia», Vypusk 1, 2009. – S. 5-17.

13. Samarskiy A. A. Teoriya raznostnyih shem / Samarskiy A. A. – M.: Nauka, 1989. – 576 s.

14. Zenkevich O. Metod konechnyih elementov v tehnike / O. Zenkevich. – M.: Mir, 1975. – 542 s.

 ISSN 1562-9945