DOI: https://doi.org/10.32836/2521-6643-2020.2-60.4
UDC 598.3

О. Д. Фірсов, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики Університету митної справи та фінансів
О. В. Трофімов, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики Університету митної справи та фінансів

ПРОСТОРОВІ МОДЕЛІ ТЕОРІЇ НЕПЕРЕРВНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

В теорії неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) було отримано ряд фундаментальних результатів. Розроблено методи та алгоритми розв'язання багатопродуктових, лінійних і нелінійних, стохастичних і динамічних задач оптимального розбиття множини із заданими і незаданими координатами центрів підмножин. Різноманітність початкових даних, що включають інформацію про властивості множини, обмеження на ті чи інші параметри задачі і критерії якості, визначає широке коло прикладних задач розбиття. Сучасні транспортні процеси характеризуються високими швидкостями, в них беруть участь нові транспортні засоби. Відповідно, виникає необхідність в аналізі не тільки самої траєкторії переміщення, але й властивостей цієї траєкторії. В роботі досліджені задачі оптимального розбиття ділянки просторової кривої, які є окремими випадками неперервної задачі ОРМ з розміщенням центрів підмножин. Запропоновано нові формулювання задач ОРМ для окремих випадків. Кожна задача являє собою узагальнення попередньої. Функція вартості інтерпретується як геометрична характеристика кривої. Враховується вплив кривизни і кручення на вартість переміщення. Фактично вводиться нова метрика для даного класу задач. Показано, що в таких постановках можливо проінтегрувати цільову функцію і отримати задачу класичного типу. Загальний підсумок проведених досліджень можна сформулювати як врахування під час переміщення не тільки довжини траєкторії, але і вартості маневрування уздовж цієї траєкторії в рамках задачі оптимального розбиття *множин з розміщенням центрів. Врахування геометричних характеристик переводить описані задачі ОРМ в прикладну область. Сучасні вимоги під час переміщення вантажів вимагають обліку максимального числа факторів, що впливають на процес, а це означає, що потрібні дані і залежності всередині самого процесу. В даному випадку це геометрія траєкторій; наступний крок – це фізика процесу, взаємодія з дорогою або повітряним простором.*

Ключові слова: *оптимальне розбиття множин, параметрично задані криві, траєкторії переміщення вантажів.*

В работе исследованы задачи оптимального разбиения участка пространственной кривой, которые являются частными случаями непрерывной задачи ОРМ с размещением центров подмножеств. Предложены новые формулировки задач ОРМ для частных случаев. Каждая задача представляет собой обобщение предыдущей. Функция стоимости интерпретируется как геометрическая характеристика кривой. Учитывается влияние кривизны и кручения на стоимость перемещения. Фактически вводится новая метрика для данного класса задач. Показано, что в таких постановках возможно проинтегрировать целевую функцию и получать задачу классического вида. Общий итог проведенных исследований можно сформулировать как введение в учет при перемещении не только длинны траектории, но и стоимости маневрирования вдоль этой траектории в рамках задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров. Учет геометрических характеристик переводит описанные задачи ОРМ в прикладную область. Современные требования при перемещении грузов требуют учета максимального числа факторов, влияющих на процесс, а это означает, что требуются данные и зависимости внутри самого процесса. В данном случае это геометрия траекторий; следующий шаг – это физика процесса, взаимодействие с дорогой или воздушным пространством.

Ключевые слова: оптимальное разбиение множеств, параметрически заданные кривые, траектории перемещения грузов.

The paper investigates the problems of optimal partitioning of a section of a spatial curve, which are special cases of a continuous Optimal Partitioning Sets (OPS) problem with the determination of location of the centers of subsets. New formulations of OPS problems for special cases are proposed. Each problem is a generalization of the previous one. The cost function is interpreted as the geometric characteristic of the curve. The effect of curvature and torsion on the cost of movement is considered. In fact, a new metric is introduced for this class of problems. It is shown that in such formulations it is possible to integrate the *objective function and obtain a problem of the classical form. The overall result of the studies carried out in this work can be formulated as taking into account during the motion not only the length of the trajectory, but also the cost of maneuvering along this trajectory in the framework of the OPS problem with obtaining the placement of centers. Taking into account the geometric characteristics transfers the described OPS problem to the applied field. Modern requirements for the goods transfer require taking into account the maximum number of factors affecting the process, which means that data and dependencies are required within the process itself. In this case, it is the geometry of the trajectories; the next step is the physics of the process, interaction with the road or airspace.*

Keywords: *optimal partitioning sets, parametric curves, cargo moving trajectories.*

Постановка проблеми. Розв'язання прикладних оптимізаційних задач з області логістики, будівництва, управління, дозволяють навіть при невеликих в процентному відношенні модифікаціях, економити значні матеріальні та часові ресурси. Отримання ж все більш ефективних рішень вимагає побудови більш складних математичних моделей досліджуваних систем з урахуванням максимального числа значущих чинників. Така ситуація, в свою чергу, має на увазі використання строгого математичного апарату, що базується на чіткій формальній стороні і інструментах прикладного застосування. Одним з таких апаратів є теорія неперервного оптимального розбиття множин (ОРМ) [10].

За останні десятиліття в теорії неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) було отримано ряд фундаментальних результатів. Розроблено методи та алгоритми розв'язання багатопродуктових, лінійних і нелінійних, стохастичних і динамічних задач оптимального розбиття множини з заданими і незаданими координатами центрів підмножин. Було отримано розв'язки прикладних задач з області моніторингу екології промислових регіонів, територіального планування сфер обслуговування. В окремий напрямок склалися задачі управління технологічними процесами [1, 4] та ін.

Різноманітність початкових даних, що включають інформацію про властивості множини, обмеження на ті чи інші параметри задачі і критерії якості, визначає широке коло прикладних задач розбиття. Що, в свою чергу, дозволяє говорити про перспективність подальших досліджень, як в напрямку розвитку теоретичної бази, так і знаходити власні шляхи розв'язання конкретних задач.

Сучасні транспортні процеси характеризуються високими швидкостями, в них беруть участь нові транспортні засоби. Відповідно виникає необхідність в обліку не тільки самої траєкторії переміщення, але і властивостей цієї траєкторії. Якщо мова йде про автомобільну високошвидкісну трасу, то для забезпечення безпеки і швидкості, мінімізації відстаней уздовж доріг необхідно враховувати траєкторію і кривизну поверхні. Аналогічна проблема виникає і при будівництві залізничного полотна. І найскладніший випадок – це регулярний розрахунок траєкторії польоту малих безпілотних літальних апаратів в умовах міської забудови.

Аналіз досліджень і публікацій. Теорія неперервних задач ОРМ ґрунтується на єдиному підході, розробленому професором Кисельовою О.М. і розвиненому її науковою школою. Суть підходу полягає в зведенні вихідних нескінченновимірних задач оптимізації через функціонал Лагранжа до негладких, як правило, скінченновимірних, задач оптимізації. Для чисельного розв'язання, використовуються ефективні методи не диференційовної оптимізації.

Виділяють такі основні напрямки розвитку теорії неперервних завдань ОРМ: лінійні задачі ОРМ; нелінійні задачі ОРМ; задачі ОРМ в умовах невизначеності [6]. Розвитком цих результатів стали дослідження задач оптимального покриття неперервних множин кулями [2], динамічних задач оптимального розбиття множин з розміщенням і без розміщення центрів підмножин, задач управління границями множин [3, 4, 5]. Отримано розв'язки задач управління розподіленими системами, які є окремими випадками неперервних динамічних задач оптимального розбиття множин.

Теорія оптимального розбиття множин застосовується в задачах штучного інтелекту: розпізнавання образів, аналізу та ідентифікації систем, управління розподіленими системами, в яких допустима область управлінь визначається розбиттям деякої множини на кінцеве число підмножин.

Окремо слід виділити зарубіжні дослідження на основі розбиття множин, які, як правило, використовують діаграми Вороного [7, 8, 9]. Теорія оптимального розбиття розглядає діаграми Вороного в якості окремого випадку задач ОРМ. Обґрунтування теоретичних основ побудови діаграм Вороного за допомогою методів оптимального розбиття множин наведене в серії робіт [10]. В [11] запропоновано узагальнення розбиття Вороного, яке називається EBVP (Effectiveness-Based Voronoi Partition), шляхом введення концепції вузлових функцій для вимірювання відстаней. З EBVP було запропоновано узагальнене середовище для формулювання задач оптимального розміщення.

Прикладом розробки алгоритмів розв'язання задач розбиття може бути робота [12]. Прикладним результатам в області технологій і логістики присвячені роботи [14, 15, 16].

В роботі [13] досліджено три задачі оптимального розбиття ділянки плоскої кривої, які є окремими випадками неперервної задачі ОРМ з розміщенням центрів підмножин. Запропоновано нові формулювання задач ОРМ для окремих випадків. Кожна задача являє собою узагальнення попередньої. У першій задачі функція вартості інтерпретується як довжина радіус-вектора на кривій. Далі враховується вплив довжини і кривизни на вартість переміщення. Фактично вводиться нова метрика для даного класу задач. Показано, що в таких постановках можливо проінтегрувати цільову функцію і отримувати задачу класичного типу.

У попередніх роботах було показано, як задачі ОРМ можуть бути застосовані на практиці в різних областях, зокрема при оптимізації розміщення центрів на плоскій кривій з різними параметрами відповідної моделі. Відповідно виникає інтерес з точки зору теоретичних перспектив і практичного застосування розбиття ділянок просторової кривої.

Мета роботи. У даній роботі досліджено задачі оптимального розбиття ділянки просторової кривої, які є окремими випадками неперервної задачі ОРМ з розміщенням центрів підмножин.

Результати дослідження. Розглянемо класичну постановку задачі оптимального розбиття множин.

Задача А2. Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина в n-вимірному евклідовому просторі E_n. Позначимо через $P_N(\Omega)$ клас усіх можливих розбить множини Ω на N підмножин:

$$\hat{P}_N(\Omega) = \left\{\overline{\omega} = (\Omega_1,...,\Omega_N) : \Omega_i \subseteq \Omega, i = \overline{1,N}; \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega; \Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing, i \neq j; i, j = \overline{1,N}\right\}.$$

Потрібно визначити розбиття $\overline{\omega}^* \in \hat{P}_N(\Omega)$ і набір "центрів" підмножин

$\tau^* = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N) \in \Omega^N$, що доставляють мінімальне значення функціоналу

$$F\left(\overline{\omega}, \tau\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \left(c(x, \tau_i) + a_i\right) \rho(x) dx .$$

Тут $c(x,\tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega\times\Omega$, вимірні по x при будь-якому фіксованому $\tau_i \in \Omega$ ($\forall$ i=1,..,N) функції; $\rho(x)$ – обмежена, невід'ємна, вимірна на Ω функція; a_i ($\forall$ i=1,..,N) – задані невід'ємні величини.

Розглянемо випадок, коли множина Ω є частиною просторової кривої, заданої на інтервалі параметрично: $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$; при цьому параметр t може змінюватися дискретно через рівні інтервали. З міркувань практики на функцію з неперервним параметром t накладаються обмеження у вигляді неперервності і диференційованості.

Сформульована в попередній роботі [13] задача A2L для ділянки плоскої кривої відповідала такому припущенню. У випадку роботи з транспортними комунікаціями, пересування ресурсів для їх будівництва або безпосереднє функціонування з метою транспортування буде здійснюватися лише по ним же. Наприклад, підвезення матеріалів на споруджуваній дорозі, найімовірніше, здійснюється по її готових ділянках [13], або транспортування вуглеводнів можливе тільки по системі трубопроводів (з точки зору моделі системи). Очевидно, що комунікації розташовуються не тільки на площині, і, відповідно виникає необхідність розв'язання просторового аналога раніше дослідженої задачі. У разі перевезення вантажу за допомогою легкого БПЛА, коли розміри вантажу перевищують вантажопідйомність (звичайно якщо вантаж ділимо на відповідні частини) також виникає ряд просторових задач, які зручно формулювати в термінах ОРМ.

Сформулюємо нову постановку задачі для випадку просторової кривої.

Задача A2L^3. Нехай $\Omega=\{(x,y,z):\ t_1 \le t \le t_2;\ x=x(t), y=y(t), z=z(t)\}$, де $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ – дійсна, обмежена, диференційована, визначена на $\left[a,b\right]$ функція. Необхідно знайти розбиття $\overline{\omega}^* \in \hat{P}_N(\Omega)$ і набір "центрів" підмножин, визначених точками відрізку $\left[a,b\right]$ $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, ..., \tau_N^*) \in \left[a,b\right]^N$, що доставляють мінімальне значення функціоналу

$$\mathrm{F}(\overline{\omega},\tau) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \left| \int_{\tau_i}^{x} \sqrt{x'(t)+y'(t)+z'(t)}\rho(t)dt \right| dx,$$

де $\left| \int_{\tau_i}^{x} \sqrt{x'(t)+y'(t)+z'(t)}\rho(t)dt \right|$ – довжина дуги кривої від центру τ_i до точки x, $\rho(x)$ – задана дійсна, обмежена на $[a,b]$ функція (далі без втрати загальності будемо вважати $\rho(x)=1$).

Як і в роботі [1], використовуємо характеристичні функції $\lambda_1(\cdot),...,\lambda_N(\cdot)$ підмножин $\Omega_1,...,\Omega_N$, і від сформульованої задачі переходимо до еквівалентної задачі нескінченновимірного програмування:

$$I(\lambda(\cdot),\tau) = \sum_{i=1}^{N} \int_a^b \sqrt{x'(t)+y'(t)+z'(t)}\lambda_i(x)dx \to \min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Lambda_1\times[a,b]^N}, \tag{1}$$

де $\Lambda_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1$ п. в. для $x \in \Omega$; $\lambda_i(x) = 0 \vee 1$; п. в. для $x \in \Omega; i = \overline{1,N}$. Аналітичний вираз для першої компоненти $\lambda^*(\cdot)$ оптимального розв’язку $(\lambda^*(\cdot),\tau^*)$ задачі (1) може бути отримано для кожного фіксованого $\tau = (\tau_1,\tau_2,...,\tau_N)$ у вигляді

$$\lambda^*_i(x) = \begin{cases} 1, \sqrt{x'(t)+y'(t)+z'(t)} = \min\limits_{i=\overline{1,N}} \sqrt{x'(t)+y'(t)+z'(t)} \\ 0, \text{для решти випадків}, i = \overline{1,N} \end{cases}$$

Далі розв'язуємо задачу скінченновимірної оптимізації

$$G(\tau) = \int_a^b \min_{k=\overline{1,N}} \sqrt{x'(t)+y'(t)+z'(t)}\rho(x)dx \to \min_{\tau\in[0,1]^N}, \tag{2}$$

цільова функція якої є в загальному випадку багатоекстремальною і не диференційованою. Розв'язок задачі (2) може бути отримано за допомогою алгоритму А2 [1,3], або застосуванням різновиду еволюційного алгоритму. Для окремих випадків ефективно працює перебір розв'язків на сітці.

Як приклад розглянемо розбиття прямої в просторі, гвинтової лінії і дуги у просторі. Очевидно, розбиття прямої в просторі повинно збігатися з відомими розв’язками для прямої на площині і відрізку [6].

Параметричне рівняння прямої в просторі має вигляд:

$$x(t)=a_x t+b_x;\ y(t)=a_y t+b_y;\ z(t)=a_z t+b_z;$$

без втрати загальності приймемо $a_x,a_y,a_z=1$, $b_x,b_y,b_z=0$;

тоді функціонал задачі A2L^3, прийме вигляд:

$$\mathrm{F}(\varpi,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\left|\int_{\tau_i}^{x}\sqrt{3}d\xi\right|dx, \text{ або } \mathrm{F}(\varpi,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\sqrt{3}\left|x-\tau_i\right|dx,$$

тобто, приходимо до дослідженому у [6] випадку.

Параметричне рівняння гвинтової лінії в загальному вигляді можна задати так:

$$x(t)=A_1\sin\gamma t+A_2\cos\gamma t,$$
$$y(t)=B_1\sin\gamma t+B_2\cos\gamma t,$$
$$z(t)=Ct+C_1;$$
$$\gamma=\sqrt{\frac{1-C^2}{r^2}};$$

де r – радіус циліндра. Розглянемо приклад: $x(t)=r\cos\pi t,\ y(t)=r\sin\pi t,\ z(t)=t$; з початком у точці (r,0,0), і кінцем у точці (*r*,*0*,*2r*). Запишемо функціонал задачі A2L^3 у вигляді

$$\mathrm{F}(\varpi,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\left|\int_{\tau_i}^{x}\sqrt{(-\pi r\sin(\pi t))^2+(\pi r\cos(\pi t))^2+1}dt\right|dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\sqrt{2\pi^2r^2+1}\left|x-\tau_i\right|dx,$$

таким чином, знову приходимо до дослідженого випадку.

Аналогічно будується розрахунок для інших параметричних кривих у просторі.

Дещо інша ситуація виникає у випадку, коли крива задана таблично; механізм пошуку зберігається, але розв'язок шукається чисельно.

Ще одною характеристикою, яка може вплинути на вартість переміщення об'єкта вздовж просторової кривої, є кручення. Його врахування виконується як додатковий доданок в функціоналі.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Загальний підсумок проведених в цій та попередній [13] роботі досліджень можна сформулювати як введення у врахування під час переміщення не тільки довжини траєкторії, але і вартості маневрування уздовж цієї траєкторії в рамках задачі оптимального розбиття множин з розміщенням центрів. Врахування геометричних характеристик переносить описані задачі ОРМ в прикладну область. Сучасні вимоги під час переміщення вантажів вимагають врахування максимального числа факторів, що впливають на процес, а це означає, що вимагаються дані і залежності всередині самого процесу. В даному випадку це геометрія траєкторій, наступний крок – це фізика процесу, взаємодія з дорогою або повітряним простором. Звичайно, може скластися ідеальна ситуація, коли відомі інтегральні вартості переміщення з точки в точку, наприклад з досвіду. Тоді задача А2 не вимагає уточнень. Задача А2 заснована на постулаті існування тільки маятникових маршрутів, що справедливо для множини задач, але далі виникає питання застосування кільцевих маршрутів, які також повинні враховувати параметри процесу з предметної галузі.

Список використаних джерел:

1. *Ус, С.А.* О моделях оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – 2010. – С.320-326.

2. *Киселева, Е.М.* Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / *Е.М. Киселева, Л.И. Лозовская, Е.В. Тимошенко* // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №3. –С.98–117.

3. *Киселева, Е. М.* О решении динамической задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / *Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, Т. А. Шевченко* // Кибернетика и систем. анализ. – 2014. –№ 6. –С. 29–40.

4. *Shevchenko T.* The features of solving of the set partitioning problems with moving boundaries between subsets / *T. Shevchenko, E. Kiseleva, L. Koriashkina* // Operations Research Proceedings 2008. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009. – P. 533–538.

5. *Коряшкіна Л. С.* Нові підходи до розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множин / *Л. С. Коряшкіна, Т. О. Шевченко* // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2009. – С. 220–231.

6. *Киселева Е.М.* Непрерывные задачи оптимального разбиения мно-

жеств и r-алгоритмы Монография / *Е.М.Киселева, Л.С.Коряшкина*. К.:-Наукова Думка, 2015.-400 с

7. *Bakolas E., Tsiotras P. The Zermelo.* Voronoi diagram: a dynamic partition problem //Automatica. –2010. –N12. –P. 2059–2067.

8. *Balzer M.* Capacity-constrained Voronoi diagrams in continuous spaces // The International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering. –2009. –10p.

9. *Jooyandeh Mohammadreza, Mohades Ali, Mirzakhah Maryam.* Uncertain Voronoi diagram // Information Processing Letters. – 2009. –109, N13. – P. 709–712.

10. *Kiseleva E.M., Koriashkina L.S.* Theory of Continuous Optimal set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations // Cybernetics and Systems Analysis, – 2015. – P. 325–335.

11. *Guruprasad K. R.* Effectiveness-based Voronoi partition: a new tool for solving a class of location optimization problems / *K. R. Guruprasad* // Optimization Letters. – 2013. – Vol. 7. – P. 1733–1743.

12. *Xibin Zhao, Hehua Zhang, Yu Jiang, Songzheng Song, Xun Jiao, and Ming Gu.* An Effective Heuristic-Based Approach for Partitioning// Journal of Applied Mathematics. Volume 2013 (2013), Article ID 138037, 8 pages

13. *Firsov A.* Study of the mathematical models of optimal partitioning for particular cases. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies: Control processes, – 2018 4(91). Vol 1. 69-76 DOI: 10.15587/1729-4061.2018.123261

14. *Koriashkina L., Saveliev V., Zhelo A.* On Mathematical Models of Some Optimization Problems Arising in the Production of Autoclaved Aerated Concrete // Advanced Engineering Forum. –2017. – P.173–181.

15. *Lau B., Sprunk C., Burgard W.* Efficient grid-based spatial representations for robot navigation in dynamic environments // Robotics and Autonomous Systems. – 2013. – 61, N 10. – P. 1116–1130.

16. *Us S., Stanina O.* The Methods and Algorithms for Solving Multi-stage Location-allocation Problem / Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control:2016 Annual Proceedings CRC Press, –2017.

References:

1. Us, *S.A.* O modelyakh optimal'nogo razbiyeniya mnozhestv v usloviyakh neopredelennosti [On models of optimal partitioning of sets under uncertainty] //

Pytannya prykladnoyi matematyky i matematychnoho modelyuvannya [Questions of applied mathematics and mathematical modeling]. 2010. pp.320-326. [Ukraine].

2. *E.M. Kiseleva, L.I. Lozovskaya, E.V. Timoshenko.* Resheniye nepreryvnykh zadach optimal'nogo pokrytiya sharami s ispol'zovaniyem teorii optimal'nogo razbiyeniya mnozhestv. [Solution of continuous problems of optimal covering by balls using the theory of optimal partitioning of sets] Kibernetika i sistemnyy analiz. [Cybernetics and Systems Analysis]. 2009.vol. 3. pp.98–117. [Ukraine].

3. *E. M. Kiseleva, L. S. Koryashkina, T. A. Shevchenko.* O reshenii dinamicheskoy zadachi optimal'nogo razbiyeniya mnozhestv s razmeshcheniyem tsentrov podmnozhestv [On the solution of the dynamic problem of optimal partitioning of sets with the location of centers of subsets]. Kibernetika i sistemnyy analiz. [Cybernetics and Systems Analysis]. 2014. vol. 6. pp. 29–40. [Ukraine].

4. *T. Shevchenko, E. Kiseleva, L. Koriashkina.* The features of solving of the set partitioning problems with moving boundaries between subsets. Operations Research Proceedings 2008. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009. pp. 533–538.

5. *L. S. Koryashkína, T. O. Shevchenko.* Novi pidkhody do rozv″yazannya dynamichnoyi zadachi optymalʹnoho rozbyttya mnozhyn [New approaches to solving the dynamic problem of optimal partitioning]. Pytannya prykladnoyi matematyky i matematychnoho modelyuvannya [Questions of applied mathematics and mathematical modeling]. 2009. pp. 220–231. [Ukraine].

6. *E.M.Kiseleva, L.S.Koryashkina.* Nepreryvnyye zadachi optimal'nogo razbiyeniya mnozhestv i r-algoritmy [Continuous problems of optimal set partitioning and r-algorithms]. Kyiv. Naukova Dumka, 2015. 400p. [Ukraine].

7. *Bakolas E., Tsiotras P. The Zermelo.* Voronoi diagram: a dynamic partition problem. Automatica. 2010. vol.12. pp. 2059–2067.

8. *Balzer M.* Capacity-constrained Voronoi diagrams in continuous spaces. The International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering. 2009. 10p.

9. *Jooyandeh Mohammadreza, Mohades Ali, Mirzakhah Maryam.* Uncertain Voronoi diagram. Information Processing Letters. 2009. vol. 109, N13. pp.709–712.

10. *Kiseleva E.M., Koriashkina L.S.* Theory of Continuous Optimal set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Vo-

ronoi Diagrams and Their Generalizations./ Cybernetics and Systems Analysis, 2015. pp. 325–335.

11. *Guruprasad K. R.* Effectiveness-based Voronoi partition: a new tool for solving a class of location optimization problems. Optimization Letters. 2013. Vol. 7. Pp. 1733–1743.

12. *Xibin Zhao, Hehua Zhang, Yu Jiang, Songzheng Song, Xun Jiao, and Ming Gu.* An Effective Heuristic-Based Approach for Partitioning. Journal of Applied Mathematics. Volume 2013 (2013), Article ID 138037, 8 pages.

13. *Firsov A.* Study of the mathematical models of optimal partitioning for particular cases. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies: Control processes, 2018 4(91). Vol 1. 69-76 DOI: 10.15587/1729-4061.2018.123261.

14. *Koriashkina L., Saveliev V., Zhelo A.* On Mathematical Models of Some Optimization Problems Arising in the Production of Autoclaved Aerated Concrete. Advanced Engineering Forum. 2017. Pp.173–181.

15. *Lau B., Sprunk C., Burgard W.* Efficient grid-based spatial representations for robot navigation in dynamic environments. Robotics and Autonomous Systems. 2013. 61, Vol. 10. Pp. 1116–1130.

16. *Us S., Stanina O.* The Methods and Algorithms for Solving Multi-stage Location-allocation Problem. Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control: 2016. Annual Proceedings CRC Press. 2017.