DOI: https://doi.org/10.32836/2521-6643-2021-1-61.2
УДК 519.6: 533,1: 629.3

А. В. Сохацький, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики Університету митної справи та фінансів
О. В. Трофімов, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики Університету митної справи та фінансів
А. І. Кузьменко, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики Університету митної справи та фінансів

ДО ПИТАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ АНАЛОГІЇ ДЛЯ ПРОЦЕДУРИ РОЗРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ

Математичне моделювання транспортних потоків і нині є досить складним та актуальним завданням. Найбільш досконалі математичні моделі транспортних потоків описуються рівняннями математичної фізики. Загальний факт відмінностей гідродинамічних моделей транспортних потоків від відповідних гідродинамічних аналогів полягає в записі правої частини рівнянь. Це стосується коректного запису, як правило, гіперболічних систем рівнянь та їх дифузійних аналогів. Складнощі, що виникають в описі транспортного потоку, схожі зі складностями, які виникають під час опису турбулентного руху рідини.

Мета статті – побудова математичної моделі, числового методу, алгоритму розв'язування задачі та створення програмного забезпечення для дослідження динаміки транспортних потоків. У статті розглядається задача моделювання транспортного потоку автомобільних транспортних засобів. Для опису фізичного процесу використано систему рівняння Нав'є – Стокса. Розроблено методику, алгоритм розв'язування задачі, та програмне забезпечення. Для числового інтегрування системи диференціальних рівнянь використано скінченно-об'ємний метод. Проведено тестування розробленої методики. За результатами числових розрахунків побудовано фундаментальну діаграму транспортного потоку.

Ключові слова: *транспортні потоки; макроскопічні моделі; числове моделювання; рівняння Нав'є – Стокса.*

Математическое моделирование транспортных потоков и сегодня является достаточно сложной и актуальной задачей. Наиболее совершенные математические модели транспортных потоков описываются уравнениями математической физики. Общим фактом отличий гидродинамических моделей транспортных потоков от соответствующих гидродинамических аналогов заключается в записи правой части уравнений. Это относится к корректной записи, как правило, гиперболичных систем уравнений и их диффузионных аналогов. Сложности, которые возникают при описании транспортного потока, похожи на сложности, которые возникают при описании турбулентного движения жидкости.

Целью статьи является построение математической модели, числового метода, алгоритма решения задачи и создания программного обеспечения для исследования динамики транспортных потоков. В статье рассматривается задача моделирования транспортного потока автомобильных транспортных средств. Для описания физического процесса использована система уравнения Навье – Стокса. Разработана методика, алгоритм решения задачи и программное обеспечение. Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений использован конечно-объемный метод. Проведено тестирование разработанной методики. По результатам численных расчетов построена фундаментальная диаграмма транспортного потока.

Ключевые слова: *транспортные потоки; макроскопические модели; численное моделирование; уравнения Навье – Стокса.*

A mathematical modeling of traffic flow for today is rather intricate and actual problem. The most perfect mathematical models of traffic flow are described by equations of mathematical physics.

In the theory of traffic flow there are various approaches to classification of their mathematical models. One of widespread is classification on macroscopic models and microscopic models. The whole group of transport vehicles, that is described by the corresponding parameters of motion, is examined in macroscopic models. Microscopic models are based on conception of safe distance to the leader. The most known models are: model of optimal speed, following by a leader model, Treibe's model of clever driver.

Historically one of the first macroscopic models is a model of Lighthill – Whitham – Richards (LWR). In it the stream of motor-car transport vehicles is considered as an unidimensional stream of compressible liquid. In a model LWR is accepted, that an unambiguous interconnection exists between speed and fluid flow density, and the laws of maintenance of mass are satisfied.

Other macroscopic models based on analogues of a traffic flow to the hydrodynamic features of compressible liquid flow exist. It is a model of Tanaka, Whitham. Payne et al. The model of Helbing Eeler Navier Stokes is proposed in 1995. In this model to the system of Payne's equations the third equation that represents the law of conservation of energy for variation of speed is added. In the second equation (law of momentum conservation) an additional component is considered that allows to take into account variation of speed. It should be noted that for the system of Navier – Stokes equations it is not known how to formulate the initial Cauchy boundary value problem in order the global solution is unique for all times.

The main difference between the hydrodynamic models of traffic flows from the corresponding hydrodynamic analogs is the formation of the right-hand side of the equations. This refers to the correct notation, as a rule, of hyperbolic systems of equations and their diffusion analogs.

The difficulties arising in the description of the traffic flow are similar to those that arise in the description of the turbulent motion of a liquid.

The aim of work is a construction of mathematical model, numerical method, algorithm for obtaining numerical solutions and creation of software for studying the dynamics of traffic flows.

The task of modeling of traffic flows of motor-car transport vehicles is examined in the article. For description of physical process the system of equations of Navier – Stokes is used. Methodology, numerical algorithm, and software, is worked out. For numerical integration of the systems of differential equations, finite volume method is used. The developed methodology was tested. Based on the results of numerical calculations, a fundamental traffic flow diagram has been constructed.

Key words: *traffic flow; macroscopic models; numerical simulation; equations of Navier – Stokes.*

Постановка проблеми. Математичне моделювання транспортних потоків і нинішнього часу є досить складним та актуальним завданням [1–5, 8]. Найдосконаліші математичні моделі транспортних потоків описуються рівняннями математичної фізики.

Реальні транспортні потоки автомобільних транспортних засобів складні та створюють проблеми транспортного сполучення в містах. Фізичне дослідження цих процесів пов'язане зі значними матеріальними і фінансовими затратами. Застосування математичного моделювання для дослідження процесів у транспортних потоках є ефективним інструментом розв'язування поставлених завдань та пошуку ефективних шляхів покращання використання транспортної інфраструктури. Проте їх математичне моделювання й досі залишається складною проблемою обчислювальної динаміки транспортних потоків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У теорії транспортних потоків існують різноманітні підходи до класифікації їх математичних моделей. Однією з поширених є класифікація на макроскопічні моделі та мікроскопічні моделі. В макроскопічних моделях розглядається ціла група транспортних засобів, яка описується відповідними параметрами руху. Мікроскопічні моделі ґрунтуються на концепції підтримки безпечної відстані до лідера. Найбільш відомими моделями є модель оптимальної швидкості, модель слідування за лідером, модель розумного водія Трайбера [6].

Однією з перших макроскопічних моделей є модель Лайтхілла – Візема – Річардса (LWR). У ній потік автомобільних транспортних засобів розглядається як одномірний потік стисливої рідини. В моделі LWR приймається, що існує взаємний однозначний зв’язок поміж швидкістю та густиною потоку, й виконуються закони збереження маси.

Потім з’явилися інші макроскопічні моделі, що ґрунтувалися на аналогах транспортного потоку гідродинамічним особливостям течії стисливої рідини. Це модель Танака, Віземa, Пейна та ін. У 1995 р. з’явилася модель Хельбінга – Ейлера – Нав’є – Стокса. В цій моделі до системи рівнянь Пейна додається третє рівняння, що відображає закон збереження енергії для варіації швидкості. В друге рівняння (закон збереження імпульсу) вводиться додаткова складова, що уможливлює враховувати варіацію швидкості. Слід зазначити, що для системи рівнянь Нав’є – Стокса не відомо, як поставити початкову крайову задачу Коші, аби глобальний розв’язок був єдиним за всіх значень часу. За розв’язання цієї проблеми математичний інститут Клея США у 2000 р. призначив премію в один мільйон доларів

Загальний факт відмінностей гідродинамічних моделей транспортних потоків від відповідних гідродинамічних аналогів полягає в записі правої частини рівнянь. Це стосується коректного запису, як правило, гіперболічних систем рівнянь та їх дифузійних аналогів.

Слід зауважити, що складнощі, які виникають під час опису динаміки транспортного потоку, схожі зі складностями, що виникають під час опису турбулентного руху стисливої рідини [6, 7].

Мета статті. Дослідження динаміки транспортних потоків – це ефективний інструмент для підвищення пропускної спроможності автомагістралей та покращання безпеки руху. Розробка нових математичних моделей транспортних процесів є актуальним та важливим завданням. Мета статті – побудова математичної моделі, числового методу, алгоритму розв’язування задачі та створення програмного забезпечення для дослідження динаміки транспортних потоків на основі гідродинамічної аналогії.

Виклад основного матеріалу. Для розв'язування задач гідродинаміки найнадійнішими є методи, що базуються на рівняннях Нав'є – Стокса. В декартовій системі координат система рівнянь Нав'є – Стокса запишеться

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}=0\,. \tag{1}$$

Вектори *Q, E, F, G, H* визначаються такими співвідношеннями:

$$Q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho uu+p-\tau_{xx}\\ \rho uv-\tau_{xy}\\ \rho wu-\tau_{xz}\\ (E_t+p)u-u\tau_{xx}-v\tau_{xy}-w\tau_{xz}+q_x\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv-\tau_{xy}\\ \rho vv+p-\tau_{yy}\\ \rho wv-\tau_{yz}\\ (E_t+p)v-u\tau_{xy}-v\tau_{yy}-w\tau_{xz}+q_y\end{bmatrix},\; G=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho uw-\tau_{xz}\\ \rho vw-\tau_{yz}\\ \rho ww+p-\tau_{zz}\\ (E_t+p)w-u\tau_{xz}-v\tau_{yz}-w\tau_{zz}+q_z\end{bmatrix}, \tag{2}$$

де ρ – густина потоку, u,v,w – компоненти проекції вектора швидкості на осі зв'язаної системи координат.

Компоненти тензора напружень та вектори теплових потоків мають вигляд:

$$\tau_{xx}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right),\;\tau_{yy}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\right),\;\tau_{zz}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\tau_{yx}\,,\;\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\tau_{zx}\,,\;\tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\tau_{zy}\,,$$

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y},\quad q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}\,. \tag{3}$$

Величину тиску в течіях стисливої рідини знаходять з рівняння такого вигляду:

$$p = (\gamma - 1)\left[E_t - \frac{1}{2}\rho\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right], \tag{4}$$

де $\gamma = C_p / C_v$ – відношення питомих теплоємностей.

Співвідношення для визначення температури має такий вигляд:

$$T = \frac{1}{C_v}\left[\frac{E_t}{\rho} - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right], \tag{5}$$

де $C_v = \dfrac{1}{\gamma(\gamma - 1)M_0^2}$;

$M_0 = u_0 / a_0$ – характерне число Маха;

a_0 – ізоентропічна швидкість звуку в незбуреному потоці.

Транспортний потік розглядається як аналог потоку стисливої рідини. Проте ряд фізичних явищ, що характерні для стисливої рідини в транспортному потоці, не характерні для динаміки руху транспортного потоку. В певному наближенні потоком транспортних засобів до потоку рідини можна знехтувати. Однак у розробленій методиці не враховується рівняння збереження енергії, тензори напружень та вектори теплових потоків. Виходячи з цього та враховуючи те, що транспортні засоби рухаються в одній площині, задачу можна звести до двовимірної. Враховуючи те, що тиск є функцією від густини потоку (4), співвідношення для тиску слід визначати як функцію від густини потоку.

З урахуванням прийнятих допущень система рівнянь для транспортних потоків на основі гідродинамічної аналогії записується так:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

З урахуванням прийнятих допущень вектори *Q, E, F, G, H* визначаються такими співвідношеннями:

$$Q = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho v u \end{vmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \end{bmatrix}, \tag{7}$$

де $p = f_\rho \cdot \rho$.

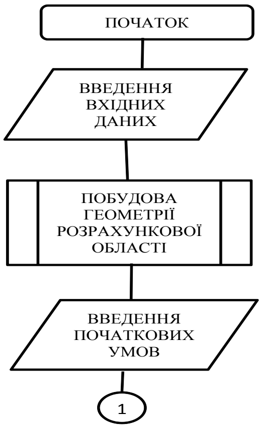
Числовий метод. Для числового розв'язування системи рівнянь (6) використано метод контрольного об'єму. Основні засади методу контрольного об'єму (МКО) полягають у тому, що розглядаються класичні рівняння балансу деякої величини Q в контрольному об'ємі V, обмеженому поверхнею $S = \sum S_k$ із зовнішньою нормаллю $\vec{n}$.

Скінченно-різницевий аналог диференціальних рівнянь (6) записується за контрольним об'ємом подібно до того, як виконується запис для гідродинамічної задачі [6, 7].

Отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язувалася методом Ейлера. Розроблена методика, алгоритм та програмне забезпечення тестувалося на ряді стандартних задач.

Таким чином, для прогнозування транспортних потоків розроблено методику розрахунку, алгоритм та написано програмне забезпечення. Для апроксимації конвективних складових вихідного рівняння переносу імпульсу використано модифіковану протипотокову схему. Відповідно, розроблено механізм апроксимації значень шуканих функцій на гранях контрольного об'єму, який гарантує уникнення некоректних негативних швидкостей транспортних засобів. Алгоритм розроблено так, щоб забезпечити виконання законів збереження (рис. 1). Члени рівнянь правої частини переносу імпульсу зазвичай апроксимуються за центрально-різницевою схемою. Фізичні процеси формування тензору напружень динаміки стисливої рідини відрізняються від фізичних процесів у потоці автомобільних транспортних засобів. Ця особливістьураховувалась під час розрахунку правих частин рівнянь переносу імпульсу.

За результатами проведених числових розрахунків побудовано залежності інтенсивності руху транспортних засобів як функцію від густини потоку. На рис. 2 зображено графік отриманих залежностей. Видно, що результати розрахунків узгоджуються з даними фундаментальної діаграми праці [8].



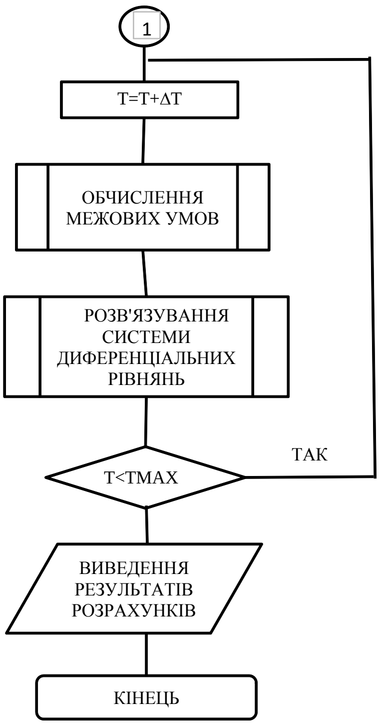


Рис. 1. Алгоритм розв’язування задачі

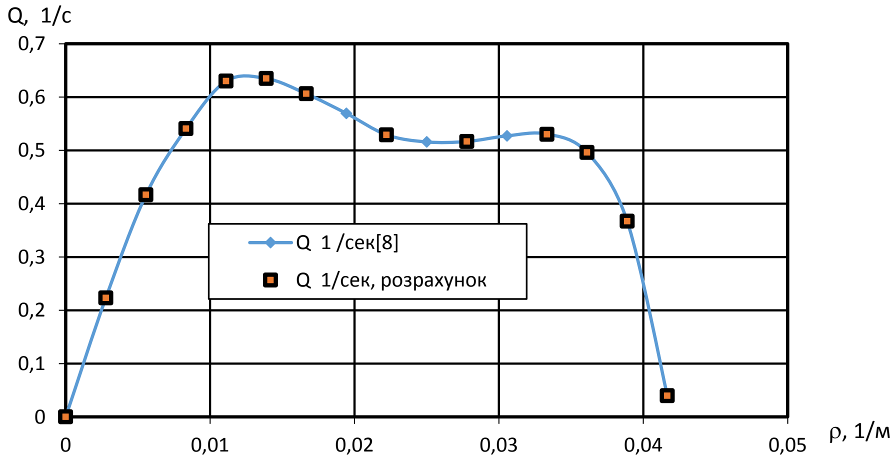


Рис. 2. Фундаментальна діаграма

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. У статті розглянуто задачу моделювання транспортного потоку автомобільних транспортних засобів. Для опису фізичного процесу використано систему рівняння Нав'є – Стокса. Розроблено методику, алгоритм розв'язування задачі, та програмне забезпечення. Для числового інтегрування системи диференціальних рівнянь використано скінченно-об'ємний метод. Проведено тестування розробленої методики. За результатами числових розрахунків побудовано фундаментальну діаграму транспортного потоку, яка у подальшому може бути адаптована до змінюваних параметрів транспортних потоків напружених міських магістралей.

Список використаних джерел:

1. *Lighthill M. J., Whitham G. B.* On kinematic waves. II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Se. A. 1955. V. 229. P. 281–345.

2. *Richards P. I.* Shock Waves on the Highway // Oper. Res. 1956. V. 4. P. 42–51.

3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. Москва: Мир, 1977.

4. *Хейт Ф.* Математическая теория транспортных потоков. Москва: Мир, 1966.

5. *Дрю А.* Теория транспортных потоков и управление ими // Транспорт. 1972. С. 1_424.

6. *Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. Л.* Современные подходы к моделированию турбулентности. Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 234 с.

7. *Сохацький А. В.* Теоретичні основи створення аеродинамічних компонувань перспективних швидкісних транспортних апаратів: дис. … доктора технічних наук: 05.07.01. Дніпропетровськ. 2010. 364 с.

8. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / Гасников А. В. и др.; под ред. А. В. Гасникова. Москва: МФТИ, 2010. 362 с.

References:

1. *Lighthill M. J., Whitham G. B.* On kinematic waves. II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Se. A. 1955. V. 229. P. 281–345.

2. *Richards P. I.* Shock Waves on the Highway // Oper. Res. 1956. V. 4. P. 42–51.

3. Whitham Dzh. Lyneinye y nelyneinye volny. M.: Myr, 1977.

4. *Kheit F.* Matematycheskaia teoryia transportnikh potokov. M.: Myr, 1966.

5. *Driu A.* Teoryia transportnikh potokov y upravlenye ymy. “Transport”, 1972 h., str. 1-424

6. *Garbaruk A. V., Strelets M. H., Travin A. K., Shur M. L.* Sovremennyie podhodyi k modelirovaniyu turbulentnosti . SPb. Izd-vo Politehn. un-ta, 2016. 234 s.

7. *Sohatskiy A. V.* Teoretichni osnovi stvorennya aerodinamichnih komponuvan perspektivnih shvidkisnih transportnih aparativ: dis. doktora tehnichnih nauk: 05.07.01. Dnipropetrovsk. 2010. 364 s.

8. Vvedenye v matematycheskoe modelyrovanye transportnykh potokov / Hasnykov A. V. y dr. / pod red. A. V. Hasnykova. M.: MFTY, 2010. 362 s.

✧ ✧ ✧ ✧ ✧ ✧ ✧

DOI:
UDC 004.056.5

B. B. Stelyuk, PhD, Professor
of the Department of Cybersecurity
and Information Technologies,
University of Customs and Finance
D. O. Tkhorzhevskyi, teacher of Computer
Science & Software Engineering
Department, University of Customs
and Finance
N. V. Khalipova, PhD, Professor of the
Department of Transport Technologies and
International Logistics, University of Customs
and Finance

MODELS AND METHODS OF IMPROVING THE EFFICIENCY OF WIRELESS ACCESS OF TELECOMMUNICATION SYSTEMS AND NETWORKS

The peculiarities of construction of complex information and telecommunication systems of special purpose are researched in the work, the general and special requirements to the applied telecommunication technologies are substantiated on the example of the automated territorially distributed system of the uniform regional operative and dispatching centers. To take into account certain