

**Міністерство освіти і науки України  
Університет митної справи та фінансів**

**МОДЕЛЮВАННЯ  
В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ  
ЧАСТИНА І**

**За редакцією д.т.н., проф. А. В. Сохацького**

**Дніпро  
2022**

УДК 656.07:629.3:519.63

*Рекомендовано до друку  
вченою радою Університету митної справи та фінансів  
(протокол № 11 від 21 лютого 2022 р.)*

**Рецензенти:**

**П. О. Стеблянко**, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри кібербезпеки та інформаційних технологій Університету митної справи та фінансів;

**В. Є. Волкова**, доктор технічних наук, професор, завідувачка кафедри динаміки будівель та споруд, будівельних конструкцій Дніпровського державного аграрно-економічного університету;

**А. Ю. Дреус**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу Дніпровського національного Університету імені Олеся Гончара

**Колектив авторів:**

А. В. Сохацький – розд. 1, І. Ю. Леснікова – розд. 2, О. В. Трофімов – розд. 3, Н. В. Халіпова – розд. 4, А. І. Кузьменко – розд. 5.

Моделювання в транспортних технологіях. Частина I : монографія / за ред. А. В. Сохацького. – Дніпро : УМСФ, 2022.– 182 с.

**ISBN 978-966-328-191-9**

Монографія присвячена розгляду питань з моделювання фізичних процесів у транспортних технологіях. Викладено сучасні підходи до моделювання в транспортних потоках: макромоделювання, мікромоделювання, мезомоделювання. Розглянуто питання підвищення ефективності перевезень пасажирів у міському та приміському сполученні, вдосконалення ефективності функціонування транспортно-логістичних підприємств, проблематику моніторингу стану елементів транспортних комунікацій як складних динамічних систем.

**ISBN 978-966-328-191-9**

© Колектив авторів, 2022

© Університет митної справи та фінансів, 2022

## ЗМІСТ

Вступ .....	5
<b>1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ .....</b>	<b>8</b>
1.1. Особливості математичного моделювання транспортних потоків .....	8
1.2. Потреби та доцільність розробки математичних моделей транспортних потоків .....	12
1.3. Класифікація математичних моделей транспортних потоків ...	14
1.4. Макроскопічні моделі .....	15
1.5. Мікроскопічні моделі .....	20
1.6. Мезоскопічні моделі .....	23
1.7. Числове моделювання транспортних потоків на основі газодинамічної аналогії .....	25
1.8. Математичне моделювання переїзду перехрестя транспортним потоком .....	32
1.9. Результати і перспективи подальших досліджень .....	40
Список використаних джерел .....	40
<b>2. ОРГАНІЗАЦІЯ МАРШРУТІВ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПАСАЖИРІВ У МІСЬКОМУ І ПРИМІСЬКОМУ СПОЛУЧЕННІ .....</b>	<b>45</b>
2.1. Оптимізація пасажирських перевезень у вузлах мегаполісів ...	45
2.2. Обґрунтування параметрів перевезень на міських і міжміських маршрутах Дніпропетровської області .....	58
Список використаних джерел .....	72
<b>3. ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ОСНОВ В ОБРОБЦІ ДАНИХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАНСПОРТНИХ КОМУНІКАЦІЙ .....</b>	<b>76</b>
3.1. Проблематика моніторингу стану елементів конструкцій транспортних комунікацій .....	76
3.2. Моделі багатошарових основ .....	80
3.3. Багатосіткові ітераційні алгоритми розв'язання граничних задач для пружних та пружно-пластичних багатошарових пакетів з криволінійними границями .....	83
3.4. Основи інформаційно-імовірнісного підходу до розв'язання обернених задач .....	97
3.5. Блокова модель задачі з розподіленими параметрами .....	104
3.6. Загальний алгоритм дослідження обернених задач з використанням блоково-параметричного підходу .....	110
3.7. Числові результати моделювання двошарового пакета з невідомою границею розділу між шарами .....	111
3.8. Перспективи подальших досліджень .....	118
Список використаних джерел .....	119

4. УПРАВЛІННЯ ТРАНСПОРТНО-ЛОГІСТИЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ПІДПРИЄМСТВ .....	123
4.1. Оптимізація транспортно-логістичних процесів промислового підприємства .....	123
4.2. Розробка моделі управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємств .....	136
Список використаних джерел .....	152
5. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ АВТОМОБІЛЬНОГО ТРАНСПОРТУ НА ВАНТАЖНОМУ ТЕРМІНАЛІ .....	154
5.1. Аналіз функціонування вантажних терміналів як складних динамічних відкритих систем .....	154
5.2. Аналіз обсягів роботи портових вантажних терміналів і технології взаємодії різних видів транспорту на них .....	160
5.3. Моделювання перевантажувальних процесів на вантажному терміналі .....	166
Список використаних джерел .....	180

## ВСТУП

Фізичні процеси в транспортних технологіях не завжди можна досліджувати на реально діючих об'єктах. Їх дослідження на відповідних моделях дає змогу знайти шляхи для підвищення ефективності транспортних технологій. Такий вид дослідження уможливорює вивчення складних задач у транспортних системах та технологіях не в реальних умовах, а в лабораторії: фізичній чи математичній. Це дає змогу отримати інформацію про реальні фізичні процеси та підвищити ефективність об'єктів транспорту не за рахунок отримання результатів без проведення натурних експериментів, а за допомогою електронно-обчислювальної машини або експериментального моделювання. Таким чином, моделювання завжди доцільне, оскільки дає можливість відтворення самого об'єкта дослідження в лабораторному або обчислювальному експерименті. Крім цього, математичне моделювання в транспортних технологіях має таку особливість, що поряд з фізичними процесами в транспортних технологіях необхідно розглядати ще й дії людини як біологічного об'єкта, котрий має свої певні психологічні особливості.

**У розділі 1** розглядається проблема моделювання динаміки транспортних потоків автомобільних транспортних засобів. Досліджено сучасні підходи до моделювання транспортних потоків: макромоделювання, мікромоделювання, мезомоделювання.

Обирати ту чи іншу модель транспортного потоку слід відповідно до фізичної постановки завдання. Для розв'язування складної задачі треба побудувати ієрархію спрощених моделей. При цьому необхідно встановити, який рівень потрібно використати в тому чи іншому випадку.

Метод розв'язування задачі з динаміки транспортних потоків має узгоджуватись із заявленою точністю розрахунку та витратами на його розробку. Високорівневі моделі потребують значних часових затрат на їх розробку та відповідних ресурсів електронно-обчислювальних машин.

Запропоновано математичну модель динаміки транспортного потоку, де враховується ціла низка факторів, двовимірність транспортного потоку, опір руху, перешкоди руху тощо.

Розроблено методику розрахунку характеристик транспортних потоків на основі гідрогазодинамічної аналогії. Для опису фізичного процесу використано систему рівняння Нав'є–Стокса. Вихідну систему рівнянь Нав'є–Стокса для стисливого газу спрощено з відповідними поясненнями. В результаті розроблено методику, алгоритм та програмне забезпечення розв'язування задачі. Для числового інтегрування системи диференціальних рівнянь використано скінченно-об'ємний метод. Проведено тестування розробленої методики. За результатами числових розрахунків побудовано фундаментальну діаграму транспортного потоку.

**У розділі 2** розглянуто питання перевезень пасажирів у міському та приміському сполученні, а також ефективної організації відповідних маршрутів. Рух транспорту у великих мегаполісах світу зводиться до режиму «стоп-старт». Це створює проблеми як для водіїв, так і для пасажирів. Моделювання транспортних пасажиропотоків може здійснюватися в межах

окремих вузлів (мікрорівень) або ж у масштабі всього міста (макрорівень), а рівні є взаємопов'язаними. Мета проведених досліджень – розвиток підходів для вдосконалення транспортної системи мегаполіса з використанням математичного моделювання взаємодії залізничного транспорту з наземними видами міського пасажирського транспорту. Критеріями оптимізації мають слугувати витрати на очікування пасажирами машин міського пасажирського транспорту (МПС), з одного боку, та витрати на експлуатацію цих машин – з іншого.

Для розв'язання поставлених задач були використані математичні методи, що дають змогу оптимізувати рух громадського транспорту в місті, що не лише сприяє розвантаженню транспортної системи міста, але й веде до позитивних економічних результатів, а саме економії коштів шляхом оптимізації руху громадського транспорту і взаємодії різних його видів.

**У розділі 3** досліджено питання розробки ефективних методів аналізу обернених задач, що виникають під час організації та виконання процесів моніторингу стану та неруйнівного контролю елементів конструкцій транспортних комунікацій (дорожнього полотна автомобільних доріг, злітно-посадкових смуг аеродромів, баластних призм залізничних колій тощо). Останніми роками з'явилися високошвидкісні засоби діагностики таких конструкцій, але недостатня розвиненість методів обробки та аналізу отриманої ними інформації не дає змоги повною мірою реалізувати можливості такої техніки. У праці розглянуто обернені задачі обчислення структурних та функціональних параметрів багатосарових основ, що перебувають під дією навантаження, прикладеного до їх верхньої поверхні. Запропоновано методику аналізу розв'язків означених задач, яка ґрунтується на застосуванні блочно-параметричного підходу в рамках інформаційно-ймовірнісної парадигми аналізу обернених задач. Відомо, що базою для будь-якої методики аналізу обернених задач є ефективне розв'язання «прямої задачі»: знаходження полів переміщень і напружень-пружного (пружнопластичного) багатосарового пакета під дією заданого навантаження. У праці запропоновано методику налаштування багатосіткового ітераційного алгоритму розв'язання зазначених задач.

**У розділі 4** розглядаються шляхи підвищення ефективності функціонування транспортно-логістичних підприємств. Проведений аналіз транспортно-логістичних процесів підприємства на сучасному етапі засвідчив нерівномірність і певні диспропорції розвитку. Ця проблема комплексна. Одним із важливих її недоліків є неефективний розподіл та спосіб використання наявного автопарку. Автомобільний транспорт бере участь у різноманітних виробничих процесах: працює в цехах промислових підприємств, використовується під час ремонтів, для перевезення матеріалів і обладнання, в навантажувально-розвантажувальних роботах та ін. Це обумовлює актуальність проблеми вдосконалення транспортно-логістичних процесів промислового підприємства. Автором розроблено модель управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємств.

Побудовано алгоритм для виявлення нестабільних процесів підприємства й визначення шляхів їх стабілізації на основі статистичного управління показниками якості та вдосконалення транспортно-логістичних процесів за допомогою контрольних карт. В основу алгоритму покладено застосування механізму покращання процесів, який впливає на розвиток моделі управління підприємством на основі повного циклу Демінга.

**У розділі 5** розглядаються питання моделювання раціональної системи обслуговування автомобільного транспорту на вантажному терміналі. Проведено аналіз функціонування вантажних терміналів як складних динамічних відкритих систем. Аналіз логістичних схем транспортування вантажів свідчить про те, що автомобільний транспорт спочатку розвивався як безперевалочний вид транспорту, а можливість прямої доставки вантажу «від дверей до дверей» традиційно розглядалась як його перевага. Однак розвиток змішаних перевезень за участю автомобільного транспорту став причиною поширення термінальної технології і на автомобільному транспорті. Саме автотранспортні термінали перші почали перетворюватися з просто транспортних на універсальні логістичні об'єкти

Автором побудовано та проаналізовано динамічну оптимізаційну модель системи обслуговування автомобільного транспорту на вантажному терміналі, що використовує методи теорії управління запасами. Розроблено підхід для формалізації процесу взаємодії потоку суден і вантажних автомобілів у порту, який базується на використанні імітаційного моделювання та методів теорії управління запасами. Запропонована методика може бути використана для підвищення ефективності вантажних терміналів та дає можливість визначити оптимальну стратегію взаємодії різних видів транспорту.

Розділ 1 написано А. В. Сохацьким, розділ 2 – І. Ю. Лесніковою, розділ 3 – О. В. Трофімовим, розділ 4 – Н. В. Халіповою, розділ 5 – А. І. Кузьменко.

# 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ

## 1.1. Особливості математичного моделювання транспортних потоків

Математичне моделювання різноманітних фізичних процесів застосовується для широкого кола завдань у різних галузях наукових досліджень. Це медицина, промисловість, військова справа, транспортні системи та технології тощо.

Саме поняття «моделювання» походить від латинського слова «modulus», що перекладається як «засіб, аналог, зразок». Термін може тлумачитись як побудова або створення моделі, так і її дослідження.

Модель – це абстрактне подання реального об'єкта у будь-якій формі: математичній, фізичній, символічній, графічній тощо.

Моделювання – це побудова робочого аналога фізичного процесу. Воно призначено для подання певних аспектів об'єкта, що вивчається.

Побудована модель відображає певну подібність властивостей або співвідношень з реальною задачею, що розглядається. Через це в наш час з'явилася та інтенсивно розвивається «теорія подібності». Вона дає змогу в моделюванні процесів та явищ використовувати відповідні критерії подібності й визначати межі застосування тих чи інших моделей.

Фізичні процеси в транспортних технологіях не завжди можна спостерігати на реально діючих об'єктах. Їх дослідження на відповідних моделях допомагає знайти шляхи підвищення ефективності транспортних технологій. Такий вид дослідження уможливорює вивчення складних задач у транспортних системах та технологіях не в реальних умовах, а в лабораторії: фізичній чи математичній. Це дає змогу отримати інформацію про реальні фізичні процеси та здешевити дослідження об'єктів за рахунок отримання результатів без проведення натурних експериментів, а за допомогою електронно-обчислювальної машини або експериментального моделювання. Отже, що моделювання завжди доцільне, оскільки дає змогу відтворити сам об'єкт дослідження в лабораторному або обчислювальному експерименті.

Моделювання відповідно до своєї мети завжди має певні спрощення та припущення різного ступеня важливості. При цьому до моделі висувається низка вимог:

1. Адекватність – досить точне відображення властивостей об'єкта.
2. Повнота – наявність усієї необхідної інформації для побудови моделі.
3. Гнучкість – можливість відтворення різних ситуацій у всьому діапазоні зміни умов і параметрів.
4. Простота – трудомісткість, витрати часу і матеріалів мають бути адекватними та відповідати поставленій меті дослідження.
5. Відповідність математичної моделі ресурсним можливостям електронно-обчислювальних машин для коректного проведення обчислювального експерименту.



Моделювання передбачає такі основні етапи:

1. Розробка фізичної моделі реального процесу.
2. Побудова математичної моделі.
3. Розробка алгоритму розв'язування поставленої задачі та програмного забезпечення.
4. Тестування розробленого програмного комплексу та вдосконалення моделі.
5. Проведення обчислювальних експериментів.
6. Аналіз результатів досліджень.
7. Розробка технічних рішень.

При цьому на кожному етапі є свої складнощі, що розв'язують певні завдання та використовують різноманітні методи.

Математичне моделювання в транспортних технологіях має таку особливість, що поряд з фізичними процесами в транспортних технологіях необхідно розглядати ще й дії людини як біологічного об'єкта, котрий має свої певні психологічні особливості. Моделювання транспортних потоків як перспективний напрямок досліджень у сфері транспорту впродовж багатьох років вивчала ціла низка вчених економічно та технічно розвинутих країн [1–5].

Основи математичного моделювання закономірностей дорожнього руху були закладені у 1912 р. Г. Д. Дубеліром [4]. Найперші задачі моделювання призначалися для обчислення пропускної здатності мережі магістралей. Узагалі моделювання фізичних процесів набуло значного поширення після Другої світової війни. Це пов'язано з тим, що із 40-х рр. минулого сторіччя активно проводились дослідження процесів, що виникають у результаті вибуху ядерного заряду. Тоді ж з'явилися перші макроскопічні моделі, які базувались на основі гідродинамічних аналогій (М. Лайтхіл [5] та Дж. Візем [6], П. Річардс [7]), та перші мікроскопічні моделі, де кожен елемент транспортного потоку розглядався як окрема одиниця (А. Рішель, Л. Пайпс [8]). Пізніше І. Пригожин, Ф. Ендрюс та Р. Херман запропонували описувати транспортний потік кінетичним рівнянням типу Больцмана з інтегралом взаємодії автомобільних транспортних засобів замість інтеграла зіткнення частинок газу [3, 9, 10].

Найпершою науковою працею, яка описує теорію транспортних потоків стала монографія американського фахівця Ф. Хейта [1]. У ній описано узагальнені математичні моделі динаміки транспортних потоків. Придільено значну увагу використанню основних співвідношень теорії ймовірностей у положеннях теорії транспортних потоків.

Зростання рівня автомобілізації почало потребувати забезпечення достатньої безпеки дорожнього руху та відповідної пропускної спроможності автомагістралей та міських автодоріг. Саме за допомогою математичних моделей можливе виконання таких завдань.

Теорію імовірностей для розрахунків руху міського транспорту було використано в праці [11]. Виявилось, що розподіл транспортних засобів добре збігається з розподілом Пуасона [12].

Питання математичного моделювання транспортних потоків із використанням електронно-обчислювальних машин досліджено в [13], де розглянуто основні властивості типових складних систем, уведено показники їх ефективності, надійності, якості управління тощо. Значну увагу приділено побудові математичних моделей, таких як системи масового обслуговування, дискретні та неперервні виробничі процеси.

Однією з найбільших ґрунтовних праць з теорії транспортних потоків є монографія Д. Дрю (1972 р.) «Теорія транспортних потоків та управління ними» [11]. У ній детально розглядаються елементи системи «водій–автомобіль–дорога» та моделі руху транспортних потоків. Описано методи регулювання руху та проєктування економічних транспортних систем з високою пропускнуою здатністю. Першу частину книги присвячено ґрунтовному описанню процесу функціонування транспортного потоку та його окремих елементів (транспортний засіб, водій, дорога). Суттєву увагу приділено системному підходу до транспортних проблем, розвитку важливих методів теорії ймовірностей та математичної статистики. У третій частині книги розглянуто низку прикладних задач щодо проєктування доріг, регулювання руху транспортних засобів.

Подальші дослідження транспортних потоків сприяли значному розширенню класів моделей транспортних потоків. Зокрема, у макроскопічному підході з'явилися моделі, де транспортний потік описується нелінійною системою гіперболічних рівнянь з дифузійною [15–21].

Створено цілу низку академічних періодичних видань, що присвячені виключно динаміці руху автомобілів. Найпоширенішими серед них є *Transportation Research*, *Transportation Science*, *Mathematical Computer Simulation*, *Operation Research*, *Automatica*, *Physical Review E*, *Physical Reports* тощо.

У сучасному мікроскопічному моделюванні переважають моделі типу «розумного водія», в яких прискорення автомобіля описано деякою функцією від швидкості даного автомобіля, відстані до автомобіля, що рухається попереду та швидкості відносно лідера [21].

Незважаючи на те, що моделювання вивчається вже протягом багатьох років, проблема виникнення заторів так до кінця й не вивчена [3]. Важливим атрибутом багатьох сучасних зарубіжних праць, в яких пропонуються математичні моделі транспортного потоку, є перевірка запропонованих моделей на можливість описання ними трьох фаз Кернера транспортного потоку [23].

Більшість математичних моделей створено для односмугового транспортного потоку. В них суттєвий вплив руху транспортних засобів на сусідніх смугах не враховується. Для його врахування необхідно вводити витоки та джерела у рівняннях, що описують транспортні потоки. Проте це ускладнює їх розв'язання. У дослідженнях Ю. Н. Карамзіна, М. А. Трапезнікової, Б. Н. Четверушкіна, Н. Г. Чурбанова, А. Б. Сухінова, І. Р. Фурманова запропоновано двовимірну багатосмугову макроскопічну модель транспортних потоків, що використовує реальну геометрію дороги [24, 25].

Серед сучасних українських фахівців з транспортного планування та моделювання слід виокремити Дмитра Безпалова, який досліджує сферу моделювання транспортних потоків, містобудування, будування різнорівневих розв'язок доріг тощо [27, 28]. У наш час математична теорія управління транспортними потоками активно розробляється у каліфорнійській школі, очолюваній П. Варайя та А. Б. Куржанським [3]. Вони розробляють способи оптимального управління світлофорами та виїздами на автомагістралі.

Вивченню і систематизації засобів математичного моделювання транспортних потоків присвячена значна кількість публікацій О. В. Гаснікова [3]. У низці праць викладено математичний апарат та деякі фізичні концепції, які слід урахувати під час створення або модернізації інтелектуальних транспортних систем [3].

Одночасно з виникненням моделювання транспортних потоків вивчалися задачі про світлофор, спрямовані на вдосконалення регулювання перехресть і збільшення їх пропускної здатності за рахунок виявлення найбільш ефективних режимів роботи світлофора. Більшість сучасних методів дослідження транспортних потоків на перехрестях, а також способів їх регулювання супроводжується написанням програми на ЕОМ.

У праці [29] розглянуто метод обчислення оптимального циклу світлофору, що базується на розробленій автором програмі, за допомогою якої моделюється рух автомобільного потоку через одне регульоване перехрестя і шляхом перебору обирається найкращий режим роботи світлофора. У дослідженні застосовується мікроскопічне моделювання. У [30] розглянуто метод розрахунку оптимальних параметрів світлофора, який базується на теорії систем масового обслуговування. Розглянуто питання існування стаціонарного режиму для уточнення моделі, а також використано програму, написану автором, в якій застосовується імітаційне моделювання транспортних потоків [29, 30].

У [31] розроблено імітаційну модель перехрестя двох доріг, яка із заданими інтенсивностями вхідних потоків дає змогу визначити такий режим роботи світлофорів, який забезпечить мінімальний середній час проходження перехрестя транспортними засобами. Особливістю моделі є врахування специфіки маневру лівого повороту, що полягає в необхідності дати дорогу транспортним засобам зустрічного напрямку, а також обмеженості простору на перехресті, на якому автомобілі можуть чекати можливості закінчення маневру.

Перспективним напрямом досліджень у сфері моделювання є проектування систем управління та моделювання транспортних потоків на основі нейронних мереж [32]. Іншим методом оптимізації світлофорного регулювання є використання методів нечіткої логіки [33].

## **1.2. Потреби та доцільність розробки математичних моделей транспортних потоків**

Моделювання у галузі транспорту застосовується у багатьох видах досліджень: від розрахунку необхідності побудови (реставрації) доріг до оптимізації потоків транспортних засобів. Такого широкого застосування цей вид досліджень у транспортних системах набув саме через складність побудови дослідного зразка або організації експерименту.

До моделювання вдаються у тих випадках, коли досліджувані системи не можна аналізувати за допомогою прямих або формальних аналітичних методів. Існує також низка інших причин, що змушують застосовувати до моделювання, більшість із яких справедлива у випадку моделювання транспортних систем.

Наприклад, під час розробки нового дорожньо-транспортного вузла у проектувальника завжди виникають питання щодо того, який режим руху сформулює нова геометрія дороги, чи буде забезпечено достатню пропускну здатність у «вузьких» місцях дороги, чи буде рух транспортних засобів відповідати нормам безпеки тощо.

У побудові нової дороги або реконструкції старої ділянки автомагістралі кожен проект має пройти узгодження на багатьох рівнях влади. У такому разі перед проектною організацією постає завдання об'єктивно та доступно представити проект, донести його суть як до інвесторів, так і до дозвільних комітетів.

Теорія транспортних потоків має широке застосування і містить такий перелік завдань.

1. Розрахунок параметрів наявних транспортних потоків.
2. Розрахунок необхідного забезпечення транспортом міст, регіонів, окремих підприємств.
3. Оцінка різноманітних дорожньо-транспортних ситуацій та варіантів розвитку транспортної інфраструктури за заданою системою показників. Ця оцінка дає можливість керувати транспортними потоками на основі порівняння кількісних значень, що уможливорює підвищувати якість транспортних технологій.
4. Оцінка роботи транспортних мереж різноманітних масштабів у цілому за розробленою системою показників якості. До цих показників належать забезпеченість транспортом, транспортна доступність, ефективність його функціонування тощо.
5. Систематизація та наочне подання даних функціонування транспортної системи міста, регіону, країни (наприклад, для візуальної оцінки та пропозицій).
6. Математичне моделювання транспортних потоків.
7. Прогнозування: транспортної потреби, пасажиропотоків та вантажопотоків, інтенсивності руху на певних ділянках мережі.
8. Техніко-економічне обґрунтування можливих інвестиційних проєктів у розвиток транспортної інфраструктури регіону, модель якого відтворюється: будівництво або реконструкція доріг; реорганізація роботи громадського транспорту; будівництво великих промислових, торговельних,

розважальних об'єктів на території регіону, що моделюється з погляду можливості виникнення транспортних проблем (аварій, заторів, зниження пропускної здатності тощо); легковий транспорт; вантажний транспорт.

9. Оптимізація потоків: громадського транспорту: вантажного і легкового.

10. Оптимізація потоків пасажирів, що використовують громадський транспорт, і пішоходів: розрахунок обсягів перевезень за видами транспорту з метою, наприклад, державного замовлення на перевезення громадським транспортом; оцінка собівартості громадського транспорту; розробка пропозицій щодо вдосконалення тарифної системи та її обґрунтування; аналіз геометрії мережі громадського транспорту та оцінка її доступності; оптимізація інтервалів руху транспорту і розкладів руху транспорту; обґрунтування введення нових маршрутів та відмови від наявних.

11. Розробка комплексних програм – транспортної стратегії – розвитку транспортної мережі, що включає всі види транспорту.

Таким чином, сфера застосування транспортного моделювання широка та багатогалузева, а дослідження у даному напрямі дуже перспективні в багатьох дослідних інститутах світу.

Переваги моделювання над іншими видами дослідження такі.

1. Побудова моделі – зручний спосіб систематичного накопичення необхідних даних, що дає змогу отримати інформацію про характеристики транспортних потоків та функціонування дорожніх споруд.

2. Моделювання складних процесів руху транспорту уможливорює визначити, які змінні є важливими і яким чином вони взаємопов'язані. В остаточному підсумку це може допомогти виведенню аналітичних виразів.

3. У деяких задачах потрібна інформація про розподіл вихідної величини, наприклад, кількість автомобілів у черзі, а не лише знання середніх значень та дисперсії.

4. Моделювання може виконуватись для перевірки неоднозначного аналітичного рішення.

5. Моделювання дешевше багатьох інших експериментів.

6. Моделювання дає інтуїтивне уявлення про досліджувану транспортну систему.

7. Моделювання – безпечний метод дослідження. Воно уможливорює вивчення впливу заходів з регулювання руху на існуючих магістралях. Ефект установа світлофорів та дорожніх знаків, обмежень швидкості руху та регулювання руху на в'їздах і виїздах – усе це можна детально дослідити, не створюючи незручностей водіям та пішоходам. Моделювання допомагає завчасно визначити вплив збільшення інтенсивності транспортного потоку на дорожні споруди та учасників дорожнього руху. З'являється можливість передбачити місце потенційних перевантажень і дорожньо-транспортних пригод та здійснити необхідні зміни у конструкції дороги або дорожньої споруди.

У більшості випадків цілі, що ставляться у моделюванні процесу руху автомобілів, чітко сформульовані та дають змогу отримати добрі результати. Моделювання є ідеальним методом дослідження транспортних потоків та передбачення стану процесів на транспортно-дорожній інфраструктурі.

### 1.3. Класифікація математичних моделей транспортних потоків

Моделювання транспортних потоків історично почало розвиватися за двома напрямками: детерміністичним та стохастичним.

В основі детермінованих моделей лежить функціональна залежність між окремими параметрами руху (швидкість, дистанція, густина потоку транспортних засобів) [3, 9]. У стохастичних моделях транспортний потік розглядається як імовірнісний процес [10].

Нині існують різноманітні підходи до аналізу транспортних потоків у математичних моделях. Їх відмінність полягає у використуваному математичному апараті, вихідних даних, об'єктах руху.

Математичні моделі руху автомобільних транспортних засобів можуть бути дуже різноманітними: від диференціальних рівнянь з частинними похідними, засобів сучасної математичної фізики до створення ігрових комп'ютерних моделей. Сучасна комп'ютерна техніка дає змогу отримувати демонстраційні моделі транспортних потоків, що рухаються мережею вулиць з перехрестями. Крім математичних моделей, що побудовані на основі рівнянь математичної фізики, розроблено також чіткі ймовірнісні підходи до транспортних мереж.

Класифікацію моделей транспортних потоків можна подати за різними критеріями опису. Наприклад, їх можна класифікувати за подібністю фізичних процесів. Так, на рис 1.1 зображено класифікацію, в якій моделі транспортних потоків поділяються на види: математичні моделі на основі рівнянь математичної фізики; математичні моделі на основі ймовірнісних підходів. Зі свого боку, моделі першої групи поділяються на макроскопічні та мікроскопічні моделі.

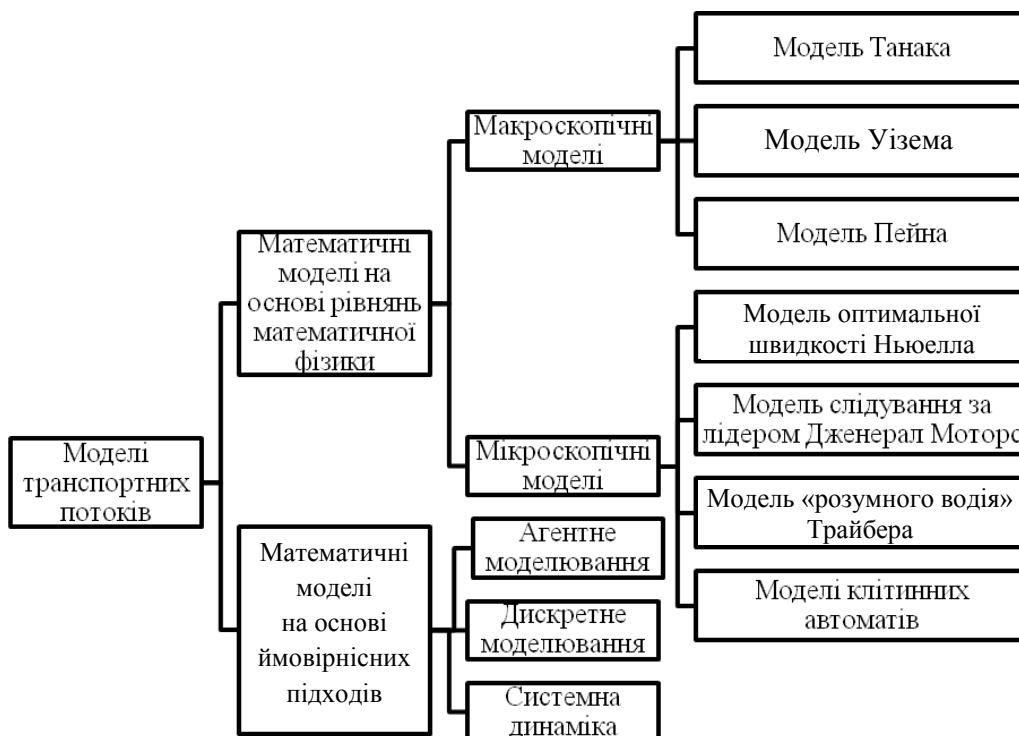


Рис. 1.1. Класифікація моделей транспортних потоків

#### 1.4. Макроскопічні моделі

У макроскопічних моделях транспортний потік подібний до руху стисливої рідини або газу. Цей вид моделювання застосовується для опису руху транспорту на значних відстанях, тобто на набагато більших розмірах транспортної мережі, ніж розмір транспортного засобу. В цих моделях критеріями оцінки транспортного потоку виступають густина транспортного потоку, його швидкість та інтенсивність. У цих умовах модель поведінки всіх водіїв однакова.

До макроскопічних моделей належать: модель Лайтхілла–Візема–Річардса (LWR) [5, 7], модель Танака [34, 35], модель Візема [6], модель Пейна [5, 6].

**Модель Лайтхілла–Візема–Річардса (LWR).** У 1955 р. було запропоновано першу макроскопічну (гідродинамічну) модель односмугового транспортного потоку, де потік автомобільних транспортних засобів розглядається як потік одновимірної стисливої рідини.

У цій моделі передбачаються такі припущення:

1. Існує взаємна однозначна залежність (рівняння стану) між швидкістю  $v(t, x)$  та густиною  $\rho(t, x)$  потоку.

2. Виконується закон збереження маси (кількості транспортних засобів).

Запис  $\rho(t, x)$  означає кількість транспортних засобів на одиницю довжини дорожнього полотна у момент часу  $t$  в околиці точки траси з координатою  $x$ . Аналогічно,  $v(t, x)$  – швидкість АТЗ у момент часу  $t$  в околиці точки траси з координатою  $x$ .

Перше припущення виражається умовою:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)), \quad (1.1)$$

де  $\rho(t, x)$  – кількість транспортних засобів на одиницю довжини дорожнього полотна (густина транспортного потоку) в момент часу  $t$  в околиці точки траси з координатою  $x$ ;

$V(\rho)$  – функціональна залежність швидкості транспортного потоку від густини транспортного потоку.

Щодо функції  $V(\rho)$  робиться припущення:

$$V'(\rho) < 0, \quad (1.2)$$

де  $V'(\rho)$  – похідна функції швидкості.

Нехай  $Q(\rho)$  – інтенсивність потоку транспортних засобів (кількість транспортних засобів, що проходять в одиницю часу через заданий перетин дорожнього полотна).

$$Q(\rho) = \rho V(\rho), \quad (1.3)$$

де  $\rho$  – густина транспортного потоку;

$V(\rho)$  – швидкість транспортного потоку.

Залежність  $Q(\rho)$  часто називають фундаментальною (основною) діаграмою. Для односмугового потоку прийнято вважати, що [6]:

$$Q''(\rho) < 0, \quad (1.4)$$

де  $Q''(\rho)$  – друга похідна інтенсивності потоку транспортних засобів.

Цю умову можна розуміти так: рух двома однаковими і незалежними смугами з різною густиною менш «ефективний», ніж рух цими смугами з однаковою густиною, рівною середньому арифметичному початкових густин.

На рис. 1.2–1.3 зображено експериментальні дані «Центру дослідження транспортної інфраструктури» м. Москви, зібрані (протягом одного дня у 2005 р.) за чотирма смугами на ділянці третього транспортного кільця від Автозаводської вулиці до Варшавського шосе, та акумульовано в одну смугу. Зазначимо, що насправді вимірювалася залежність  $V(Q)$ .

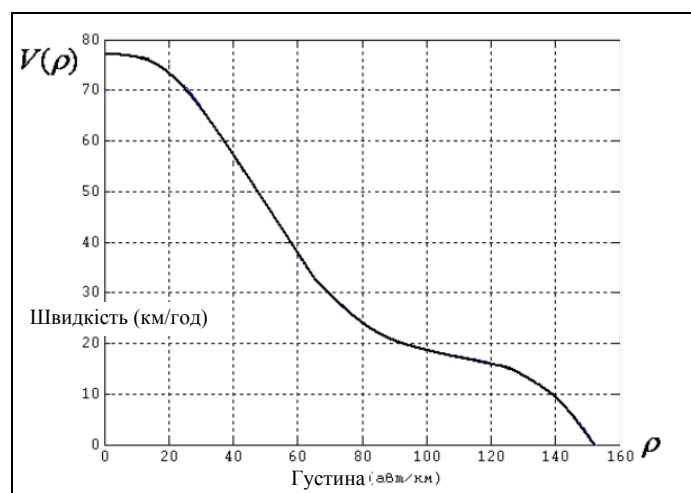


Рис. 1.2. Рівняння стану транспортного потоку [3]

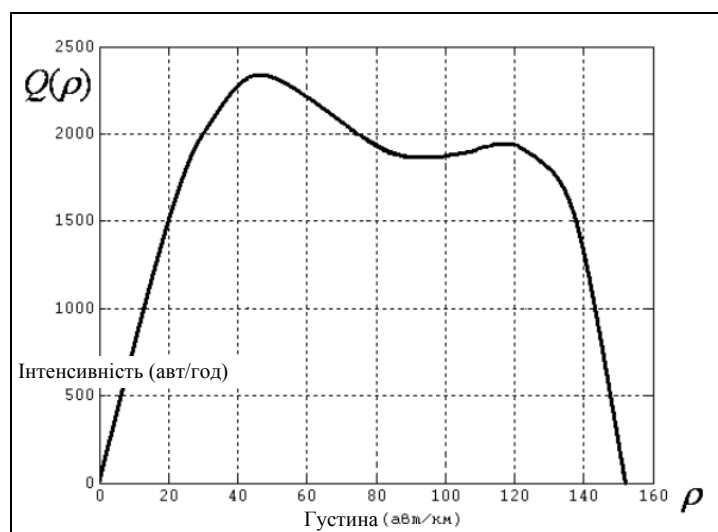


Рис. 1.3. Фундаментальна діаграма [3]



Пояснити невеликий провал інтенсивності транспортного потоку  $Q(\rho)$  з густинами  $\rho \approx 60 - 115 \text{ ATЗ/км}$  можна, очевидно, тим, що за цих густин суттєвий вплив на інтенсивність потоку здійснюють переміщення автомобіля з однієї смуги на іншу. Перелаштування транспортного засобу з однієї смуги в іншу за цих густин знижують інтенсивність потоку. З одного боку, за рахунок переміщення зі смуги на смугу можна рухатись швидше (що й відбувається з густиною  $\rho \approx 30 - 50 \text{ ATЗ/км}$ ), а з іншого – у середньому таке переміщення за  $\rho \approx 50 - 120 \text{ ATЗ/км}$  спричиняють додаткові витрати на саме перелаштування та уповільнення тих автомобілів, перед якими стає новий транспортний засіб. Друге пояснення цього пов'язано з тим, що з густиною  $\rho \approx 50 - 120 \text{ ATЗ/км}$  саме поняття «фундаментальна діаграма» не зовсім коректне [21]. Тобто за цих густин немає чіткої залежності величини потоку (швидкості) від густини. Одному значенню густини відповідає цілий проміжок можливих значень потоку (швидкості).

Друге припущення виражається законом збереження маси (кількості транспортних засобів):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad (1.5)$$

де  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  – частинна похідна густини транспортного потоку;

$\frac{\partial Q(\rho)}{\partial x}$  – частинна похідна інтенсивності транспортного потоку.

**Модель Танака.** Цю модель було запропоновано у 1963 р. У ній розглядається односмуговий потік транспортних засобів. Нехай швидкість транспортного засобу не може перевищувати  $v_{\max}$ . Густина транспортного потоку:

$$\rho(v) = \frac{1}{d(v)}, \quad (1.6)$$

де  $d(v) = L + c_1 v + c_2 v^2$  – середня (безпечна) відстань між АТЗ із заданою швидкістю руху потоку;

$L$  – середня довжина АТЗ;

$c_1$  – час, що характеризує реакцію водіїв;

$c_2$  – коефіцієнт пропорційності гальмівному шляху.

Із залежності  $d(v)$  можна отримати залежність  $v(t, x) = V(\rho(t, x))$ , що задовольняє умову  $V'(\rho) < 0$ .

Коефіцієнт  $c_2$  залежить від дорожніх умов. Отже, за нормальних умов:

$$d(v)[\text{м}] = 5.7[\text{м}] + 0,504[\text{с}] \cdot v \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] + 0,0285 \left[ \frac{\text{с}^2}{\text{м}} \right] v^2 \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right]; \quad (1.7)$$

для мокрого асфальту:

$$d(v)[\text{м}] = 5.7[\text{м}] + 0,504[\text{с}] \cdot v \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] + 0,0570 \left[ \frac{\text{с}^2}{\text{м}} \right] v^2 \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right]; \quad (1.8)$$

для обмерзлої дороги:

$$d(v)[\mathcal{M}] = 5.7[\mathcal{M}] + 0,504[\mathcal{C}] \cdot v \left[ \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{C}} \right] + 0.1650 \left[ \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{M}} \right] v^2 \left[ \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{C}^2} \right], \quad (1.9)$$

де  $v$  – швидкість руху транспортного засобу.

Моделлю Танака називають LWR-модель, в якій рівняння стану  $V(\rho)$  визначається відповідно до попереднього опису. Незважаючи на свою простоту, модель Танака має дуже важливе значення у сучасних дослідженнях транспортних потоків.

**Модель Візема.** У цій моделі (запропонованій у 1955 р.) ураховується «далекозорість» водіїв [6]:

$$v(t, x) = V(\rho(t, x)) - \frac{D(\rho(t, x))}{\rho(t, x)} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x}, D(\rho) > 0, \quad (1.10)$$

де  $V(\rho(t, x))$  – швидкість транспортного засобу;

$\rho(t, x)$  – густина транспортного потоку.

Звідки з урахуванням закону збереження кількості АТЗ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = 0, \quad (1.11)$$

де  $\rho$  – густина транспортного потоку;

$t$  – час;

$v$  – швидкість транспортного потоку;

$x$  – координата транспортного полотна.

Отримано рівняння типу Бюргерса (закон збереження з нелінійною дивергентною дифузією):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (1.12)$$

де  $\rho$  – густина транспортного потоку;

$t$  – час;

$Q(\rho)$  – інтенсивність транспортного потоку;

$x$  – координата транспортного полотна.

У правій частині рівняння (1.12) з'явилися нові дифузійні доданки. Вони відповідають тому факту, що водії зменшують швидкість, зі збільшенням густини потоку АТЗ спереду та збільшують у разі його зменшення.

**Модель Пейна.** Цю модель викладено у праці [36]. Її можна розуміти як закон збереження кількості автомобільних транспортних засобів, в якому вже не передбачається залежність швидкості від густини:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = 0, \quad (1.13)$$

де  $\rho$  – густина транспортного потоку;

$t$  – час;

$v$  – швидкість транспортного потоку;

$x$  – координата транспортного полотна.

А для швидкості виписується відповідне рівняння як прагнення реальної швидкості  $v$  до бажаної швидкості:

$$\frac{d}{dt} v = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \left( v - \left( V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \right) \right), \quad (1.14)$$

де  $v$  – швидкість транспортного потоку;

$t$  – час;

$\tau$  – показник, що характеризує швидкість прагнення;

$x$  – координата транспортного полотна.

$$V(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (1.15)$$

де  $V(\rho)$  – швидкість транспортного потоку;

$\rho$  – густина транспортного потоку;

$x$  – координата транспортного полотна.

Отриману систему рівнянь запишемо у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\rho \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{D}{\tau\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau} V - v \end{cases}, \quad (1.16)$$

де  $\rho$  – густина транспортного потоку;

$t$  – час;

$v$  – швидкість транспортного потоку;

$x$  – координата транспортного полотна;

$\tau$  – показник, що характеризує швидкість прагнення.

## 1.5. Мікроскопічні моделі

В основі мікроскопічного моделювання лежить концепція про «бажання дотримуватись безпечної дистанції до лідера під час руху». Цей підхід розглядає рух автомобілів як рух окремих об'єктів і є найбільш ефективним в описі руху на невеликих відстанях (наприклад, на перехрестях). На відміну від макроскопічних моделей, у мікроскопічних моделях кожен транспортний засіб характеризується власною швидкістю та індивідуальними обмеженнями. До мікроскопічних моделей належать: модель оптимальної швидкості Ньюелла [6, 37], модель слідування за лідером Дженера-Моторс [38–39], модель «розумного водія» Трайбера [9, 21, 38, 40, 41], моделі клітинних автоматів [42–45].

**Модель оптимальної швидкості Ньюелла.** Нехай транспортні засоби в односмуговому потоці пронумеровані зліва направо (рис. 1.4).

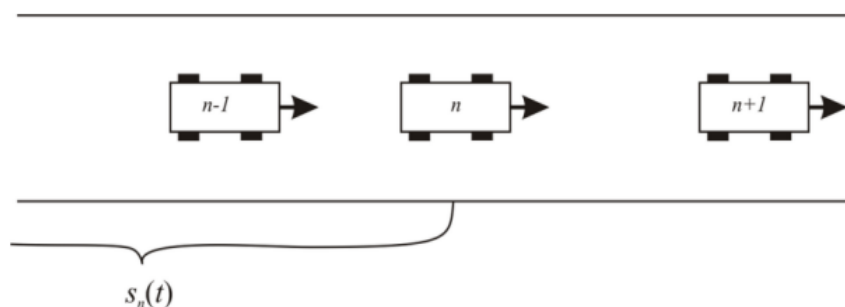


Рис. 1.4. Мікроскопічна модель оптимальної швидкості Ньюелла

Позначимо через  $s_n(t)$  – координата центра  $n$ -го транспортного засобу в момент часу  $t \geq 0$ . Тоді:

$$h_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t), \quad (1.17)$$

$$v_n(t) = s'_n(t), \quad (1.18)$$

де  $h_n(t)$  – відстань між двома транспортними засобами, що прямують один за одним;

$s_n(t)$  – координата центра  $n$ -го транспортного засобу;

$v_n(t)$  – швидкість  $n$ -го транспортного засобу.

У мікроскопічній моделі Ньюелла, яка була запропонована у 1961 р. [29], постулюється, що для кожного водія існує «безпечна» швидкість руху, яка залежить від дистанції до лідера:

$$v_n(1 + \tau) = V\left(\frac{1}{h_n(t)}\right), \quad (1.19)$$

де  $\tau$  – час, що характеризує реакцію водіїв;

$V'(\rho) < 0$ ;

$h_n(t)$  – відстань між двома транспортними засобами, що прямують один за одним.

Час, що характеризує реакцію водія:

$$\tau = -\frac{L}{Q'(\rho_{\max})}, \quad (1.20)$$

де  $L$  – середня довжина транспортних засобів;

$Q(\rho)$  – залежність густини транспортного потоку від максимальної густини транспортного потоку.

Поведінку потоку можна записати так:

$$V(\rho) = \frac{\frac{1}{\rho} - L}{\tau}, \quad (1.21)$$

де  $\frac{1}{\rho} - L$  – відстань від даного транспортного засобу до транспортного засобу, що їде попереду;  $\tau$  – час, що характеризує реакцію водіїв.

**Модель слідування за лідером Дженерал Моторс.** У 1959 р. співробітники концерну Дженерал Моторс запропонували одну з перших мікроскопічних моделей односмугового транспортного потоку, за допомогою якої можна отримати фундаментальну діаграму [38, 39]:

$$s_n''(t + \tau) = \alpha \frac{s_{n+1}'(t) - s_n'(t)}{s_{n+1}(t) - s_n(t)}, \quad \alpha > 0, \quad (1.22)$$

де  $s_n''(t + \tau)$  – прискорення  $n$ -го транспортного засобу;

$s_n(t)$  – координата центра  $n$ -го транспортного засобу;

$s_n'(t)$  – швидкість  $n$ -го транспортного засобу.

Перепишемо цю модель так:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = \alpha \frac{d}{dt} \ln h_n(t), \quad (1.23)$$

або:

$$v_n(t + \tau) - v_n(\tau) = \alpha \ln \frac{h_n(t)}{h_n(0)}. \quad (1.24)$$

У 1961 р. Д. Газіс, Р. Херман та Р. Розері запропонували таку модель [9, 39]:

$$s_n''(t + \tau) = \beta \frac{(s_n'(t + \tau))^{m_1}}{(s_{n+1}(t) - s_n(t))^{m_2}} (s_{n+1}'(t) - s_n'(t)), \quad \beta > 0, \quad (1.25)$$

де  $m_1 (< 1)$ ,  $m_2 (> 1)$  – емпірично отримані константи ( $m_1 \approx 8$ ,  $m_2 \approx 2,8$ );

$s_n'(t)$  – швидкість  $n$ -го транспортного засобу;

$s_n(t)$  – координата центра  $n$ -го транспортного засобу.

**Модель «розумного водія» Трайбера.** Моделі оптимальної швидкості та слідування за лідером можна об'єднати в одну спільну мікроскопічну модель розумного водія:

$$s_n''(t) = a_n \left[ 1 - \left( \frac{s_n'(t)}{V_n^0} \right)^\delta - \left( \frac{d_n^*(s_n'(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t))}{s_{n+1}'(t) - s_n'(t)} \right)^2 \right], \quad (1.26)$$

де  $a_n \left[ 1 - \left( \frac{s_n'(t)}{V_n^0} \right)^\delta \right]$  – описання динаміки утворення АТЗ на вільній дорозі;

$\left( \frac{d_n^*(s_n'(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t))}{s_{n+1}'(t) - s_n'(t)} \right)^2$  – описання гальмування через взаємодію з лідером (автомобіль попереду);

$\delta$  – параметр, що відповідає за поведінку під час розгону (за  $\delta = 1$  має місце експоненціальний за часом розгон, у границі  $\delta \rightarrow \infty$  розгон відбувається з постійним «комфортним» прискоренням  $a_n$  аж до досягнення бажаної швидкості  $V_n^0$ ). Гальмівний член визначається відношенням бажаної дистанції  $d_n^*$  (безпечної відстані) до фактичної дистанції  $h_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t)$ , причому бажана дистанція визначається так:

$$d_n^*(s_n'(t), s_{n+1}'(t) - s_n'(t)) = d_n + T_n s_n'(t) - \frac{s_n'(t)(s_{n+1}'(t) - s_n'(t))}{2\sqrt{a_n b_n}}, \quad (1.27)$$

де  $d_n$  – відстань між транспортними засобами ( $n$ -м та  $(n + 1)$ -м) у заторі (прийнято вважати, що  $d_n \approx 7,5$  м);

$b_n$  – прискорення «комфортного» гальмування ( $a_n \approx b_n \approx 2$  м/с<sup>2</sup>);

$T_n$  – аналог часу реакції водія.

У рівноважному потоці, коли

$$s_n''(t) = 0, \quad s_{n+1}'(t) - s_n'(t) \equiv 0, \quad s_n'(t) \equiv V: d(V) \stackrel{def}{=} s_{n+1}(t) - s_n(t) = d^*(V, 0) \left[ 1 - \left( \frac{V}{V^0} \right)^\delta \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.28)$$

З цього співвідношення спочатку можна побудувати рівняння стану транспортного потоку – залежність  $V(\rho)$ , а потім – фундаментальну діаграму  $Q(\rho)$ .

**Моделі клітинних автоматів.** У моделях клітинних автоматів дорога розбивається на клітини, дискретним є й час. Часто вважається, що у клітині може перебувати не більше одного АТЗ. Таким чином, отримують різницеві аналоги розглянутих раніше макроскопічних рівнянь. Зазначимо також, що часто і множину можливих значень швидкості АТЗ вважають дискретною у таких моделях.

Цю концепцію впровадив Дж. фон Нейман у 50-ті рр. ХХ ст. [46]. У моделі на кожному кроці  $m \rightarrow m + 1$  стан усіх транспортних засобів у системі оновлюється відповідно до таких правил.

1. Прискорення відображає тенденцію рухатись якомога швидше, не перевищуючи максимально допустиму швидкість:

$$v_n(m+1) = \min\{v_n(m) + 1, v_{\max}\}. \quad (1.29)$$

2. Гальмування гарантує відсутність зіткнень з транспортними засобами, що йдуть попереду:

$$v_n(m+1) = \min\{v_n(m), s_{n+1}(m) - s_n(m) - d\}, \quad (1.30)$$

де  $d \approx 7,5$  м.

3. Випадкові збурення враховують різницю у поведінці транспортних засобів:

$$v_n(m+1) = \begin{cases} \max\{v_n(m) - 1, 0\}, p, \\ v_n(m), 1 - p. \end{cases} \quad (1.31)$$

4. Рух:

$$s_n(m+1) = s_n(m) + v_n(m). \quad (1.32)$$

Усі чотири наведених кроки необхідні для відтворення основних властивостей транспортного потоку [42–45].

### 1.6. Мезоскопічні моделі

Мезоскопічні моделі поєднують у собі риси макроскопічних та мікроскопічних моделей (рис. 1.5). У них не відстежуються окремі транспортні засоби, але враховується їхня поведінка, наприклад, з погляду теорії ймовірностей. Мезоскопічні моделі описують рух транспортних засобів на високому рівні деталізації, як у мікромодельованні. Проте їхню поведінку та взаємодію описують на низькому рівні, як у макромодельованні. Транспортний потік розглядається як набір декількох груп сутностей, дії яких і взаємодія між якими розглядається з високим ступенем деталізації.

Нині дослідниками розроблено різноманітні форми мезоскопічних моделей [47]. Транспортні засоби можуть об'єднувати в групи, що маршрутизуються за транспортною мережею. Група автомобілів діє як єдине ціле і швидкість групи на кожній дорожній ділянці встановлюється функцією швидкості, визначеної для цієї групи. Густина цієї групи задається як відношення кількості автомобілів у групі до кількості кілометрів на одну смугу руху. Якщо густина групи на лінії висока, то швидкість автомобілів буде низька. Якщо густина групи низька, то швидкість групи висока. У цій формі мезоскопічної моделі не підтримуються зміна смуг руху, прискорення і гальмування.

Макромодельовання	
Мікромодельовання	
Клітинні автомати	
Мезомодельовання	

Рис. 1.5. Мезоскопічні моделі як поєднання рис макроскопічних та мікроскопічних моделей

Інша форма мезоскопічної моделі: індивідуальні транспортні засоби об'єднані в осередки, які встановлюють поведінку цих транспортних засобів. Автомобілі можуть входити в осередки і полишати осередки, але не можуть їх обганяти. Швидкість автомобілів встановлюється осередком, а не за індивідуальним рішенням водія. Мезомодельовання дає змогу моделювати дорожню мережу і рух автомобілів майже з таким же рівнем деталізації, як і мікромодельовання. Мезоскопічне моделювання застосовується там, де бажано використати мікроскопічні моделі, але не можна реалізувати через великий розмір транспортної мережі.

Загалом виокремлюють чотири види мезомоделей:

- моделі розподілу інтервалів руху;
- кластерні моделі;
- кінетичні моделі;
- кінетичні хвилеві моделі.

Мезоскопічні моделі розподілених інтервалів оцінюють різницю часу проходження між двома транспортними засобами певної точки дорожнього шляху. Передбачається, що інтервали є незалежними і однаково розподіленими випадковими величинами. Суть підходу полягає в описі розподілу інтервалів між окремими транспортними засобами без опису окремо взятих транспортних засобів. Прикладами мезомоделей розподілених інтервалів є напівпуасонівська модель [48], узагальнена модель транспортних черг [49], модель розподілу інтервалів руху для багатосмугових транспортних потоків [50].

Кластерні мезомоделі є сукупністю моделей, що рухаються на однаковій і невеликій відстані одна від одної. Кластерні моделі однорідні через виключення з опису відстаней між транспортними засобами та швидкості в межах кластера. Кінетичні моделі описують динаміку фазової густини транспортного потоку. Вперше мезомодель цього типу запропонував відомий учений І. Пригожин у праці [51]. У подальшому дослідники вдосконалили моделі [52, 53]. У цих моделях динаміка фазової густини розглядається в розширеному фазовому просторі.



У практиці отримали поширення мезомодельовання моделі теорії кінематичних хвиль. Вони спрямовані на опис ударних хвиль і заторів. Ця концепція ефектів утворення черги, рециркуляції черги та їх розсіювання розроблена фахівцями Лайтхіллом, Віземом (1955), Річардсом (1956). Вона ефективно описує динаміку руху транспорту шляхом об'єднання функції обмежень збереження потоку, моделей руху транспорту і теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних [5]. Оскільки отримати аналітичні розв'язки таких рівнянь практично неможливо, їх розв'язують шляхом використання числових методів.

Мезоскопічні моделі набули поширення для виконання таких транспортних завдань:

- аналіз містобудівних і будівельних заходів з прогнозуванням транспортних навантажень та їх дій;
- прогнозування функціонування платних ділянок автомобільних доріг;
- реконструкція ділянок транспортної інфраструктури, зміна умов руху в транспортній мережі;
- моделювання дорожніх об'єктів з координованим світлофорним регулюванням, з урахуванням транспортних заторів і складних процесів у дорожньому русі (зважаючи на ударні хвилі, зворотні затори тощо);
- оцінка пропускної спроможності доріг міст;
- оцінка якості схем організації дорожнього руху;
- визначення рівня сервісу різних елементів транспортної інфраструктури.

Мезоскопічне моделювання виявилось універсальним підходом, оскільки дає змогу оцінювати запропоновані рішення для двох рівнів моделювання: макроскопічного і мікроскопічного.

### **1.7. Числове моделювання транспортних потоків на основі газодинамічної аналогії**

Складність транспортних потоків, стійкі та нестійкі режими руху, нелінійність зворотних зв'язків, велика кількість змінних для опису руху потребує використання методів та алгоритмів нелінійної динаміки. Складність процесів, що відбуваються в транспортному потоці, та вплив на швидкість кожного транспортного засобу великої кількості чинників не дають змоги точно описати режими руху потоку простими математичними аналітичними залежностями. Тому численні гіпотези теорії руху транспортних потоків походять із розгляду спрощених схем.

Більшість відомих математичних моделей динаміки транспортних потоків одновимірні й не розглядають розподіл параметрів руху в площині дорожньої структури [1–33]. Багатосмуговий рух транспортних засобів має розглядатися двовимірними моделями з урахуванням реальної геометрії дороги.

Математична модель для розрахунку параметрів транспортного потоку повинна будуватися на законах збереження маси, кількості руху, енергії

та залежностях для інших характеристик транспортного потоку з урахуванням цілої низки істотних факторів (рис. 1.6).

Для визначення характеристик динаміки руху транспортних засобів існує два підходи. Перший, пов'язаний з іменем Лагранжа, полягає в заданні поточних значень координат  $x, y, z$  транспортного засобу як функції часу. Другий, пов'язаний з іменем Ейлера, полягає в аналітичному або векторному заданні поля швидкостей потоку транспортних засобів з проєкціями  $u, v, w$  вектора швидкості.

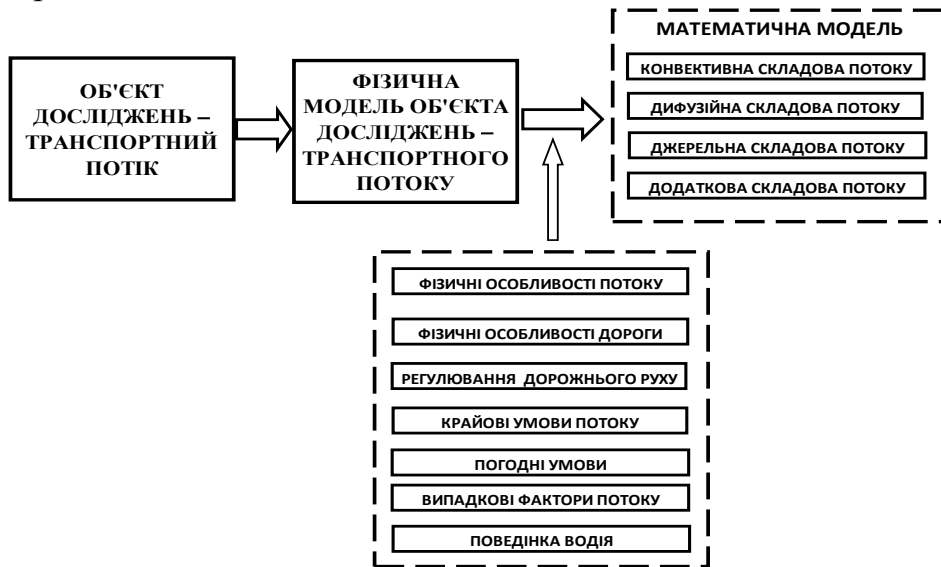


Рис. 1.6. Складові математичної моделі транспортного потоку

Для моделювання динаміки транспортних потоків у дослідженні використано Ейлеровий підхід. Структуру процесу математичного моделювання динаміки транспортного потоку зображено на рис. 1.7.

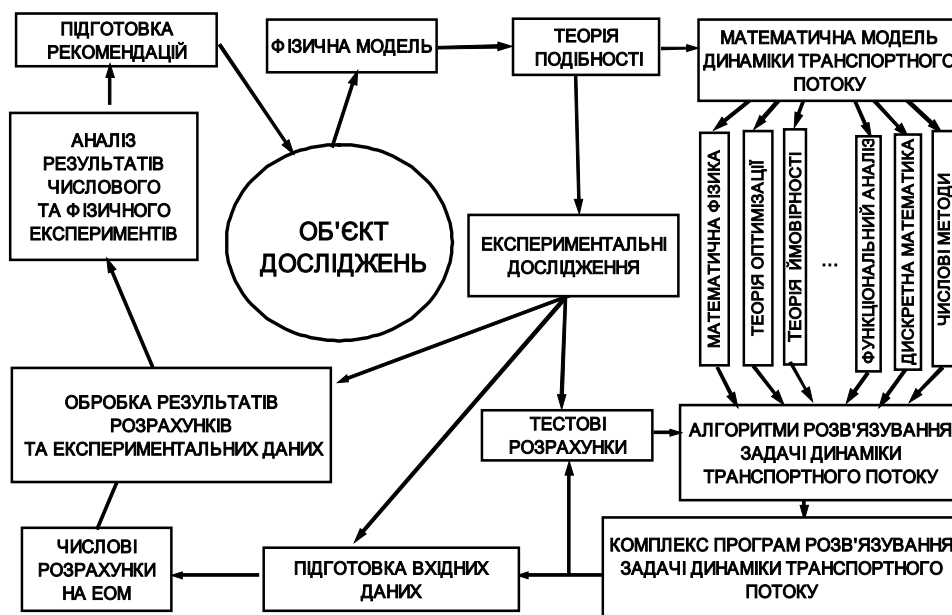


Рис. 1.7. Структура математичного моделювання динаміки транспортного потоку

**Математична модель та методика розв'язування задачі.** Для розв'язування задач динаміки транспортних потоків на основі газодинамічної аналогії найточнішими є методи, що базуються на рівняннях Нав'є–Стокса. В декартовій системі координат система рівнянь Нав'є–Стокса запишеться:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0. \quad (1.33)$$

Вектори  $Q$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  визначаються такими співвідношеннями:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{xx} \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho w u - \tau_{xz} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho v v + p - \tau_{yy} \\ \rho w v - \tau_{yz} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{xz} + q_y \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w - \tau_{xz} \\ \rho v w - \tau_{yz} \\ \rho w w + p - \tau_{zz} \\ (E_t + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

де  $\rho$  – густина потоку,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – компоненти проєкції вектора швидкості на осі зв'язаної системи координат.

Компоненти тензора напружень та вектори теплових потоків мають вигляд:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (1.36)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy}, \quad (1.37)$$

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (1.38)$$

Величину тиску в течіях стисливої рідини обчислюють з рівняння стану:

$$p = (\gamma - 1) \left[ E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right], \quad (1.39)$$

де  $\gamma = C_p / C_v$  – відношення питомих теплоємностей.

Співвідношення для визначення температури має вигляд:

$$T = \frac{1}{C_v} \left[ \frac{E_t}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right], \quad (1.40)$$

де  $C_v = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2}$ ;  $M_0 = u_0/a_0$  – характерне число Маха;  $a_0$  – ізоентропічна швидкість звуку в незбуреному потоці.

Транспортний потік розглядається як аналог потоку стисливої рідини. Проте низка фізичних явищ, що характерні для стисливої рідини в транспортному потоці, не характерна для динаміки руху транспортного потоку. Певним наближенням потоку транспортних засобів до потоку рідини можна знехтувати. Зрозуміло, що для динаміки транспортних потоків не характерна низка фізичних особливостей. Тензори напружень у потоці стислого газу не можуть фізично відображатися в транспортному потоці: не спостерігається дотик автомобілів один до одного, як в одній смузі, так і між смугами руху. Перепад температур впливає на динаміку течії в газодинамічних задачах. У транспортному потоці температура одного автомобіля не впливає на динаміку руху іншого транспортного засобу. Рівнянням збереження енергії потоку також можна знехтувати.

Таким чином, у розробленій методиці не враховується рівняння збереження енергії, тензори напружень та вектори теплових потоків. Виходячи з цього та враховуючи те, що транспортні засоби рухаються в одній площині, задачу можна звести до двовимірної. Зважаючи на те, що тиск  $\epsilon$  функцією від густини потоку (1.39), співвідношення для тиску слід визначати як функцію від густини потоку.

З урахуванням зроблених припущень система рівнянь (1.33) для транспортних потоків на основі гідрогазодинамічної аналогії записується так:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (1.41)$$

Зважаючи на попередні припущення, вектори  $Q$ ,  $E$ ,  $F$  визначаються такими співвідношеннями:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

де  $p = f_\rho \cdot \rho$ .

З теорії механіки рідини, газу та плазми відомо, що швидкість звуку в середовищі визначається співвідношенням:

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (1.43)$$

Складову системи рівнянь (1.41)  $\partial p/\partial x$  та  $\partial p/\partial y$  запишемо:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}. \quad (1.45)$$

Прийmemo, що для транспортного потоку  $k = a^2$ .

З урахуванням вищевикладеного систему диференційних рівнянь для транспортних потоків запишемо:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -k \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} = -k \frac{\partial \rho}{\partial y}. \end{cases} \quad (1.46)$$

**Числовий метод.** Для числового розв'язання системи рівнянь (3) використано метод контрольного об'єму. Основні засади методу контрольного об'єму (МКО) полягають у тому, що розглядаються класичні рівняння балансу деякої величини  $Q$  в контрольному об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $s = \sum s_k$  із зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$ .

Скінченно-різницевий аналог диференційних рівнянь (6) записується за контрольним об'ємом подібно до того, як виконується запис для гідродинамічної задачі [6, 7].

Отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язувалася методом Ейлера. Розроблено методику, алгоритм (рис. 1.8) та програмне забезпечення розв'язання задачі динаміки транспортного потоку. Розроблене програмне забезпечення протестовано на стандартних задачах для транспортних потоків.

Таким чином, для прогнозування транспортних потоків розроблено методику розрахунку, алгоритм та написано програмне забезпечення. Для апроксимації конвективних складових вихідного рівняння переносу імпульсу проведено розробку модифікованої протипотокової схеми 1-го порядку апроксимації. Відповідно, створено механізм апроксимації значень шуканих функцій на гранях контрольного об'єму, який гарантує уникнення некоректних негативних швидкостей транспортних засобів. Алгоритм розроблено таким чином, щоб забезпечити виконання законів збереження. Члени рівнянь правої частини переносу імпульсу зазвичай апроксимуються за центрально-різницевою схемою. Фізичні процеси формування тензора напружень динаміки стисливої рідини відрізняються від фізичних про-

цесів у потоці автомобільних транспортних засобів. Ця особливість урахувалась під час обчислення правих частин рівнянь переносу імпульсу.

За результатами проведених числових розрахунків побудовано залежності інтенсивності руху транспортних засобів як функцію від густини потоку. На рис. 1.9 зображено графік отриманих залежностей. Видно, що результати розрахунків узгоджуються з даними фундаментальної діаграми праці [8].

На рис. 1.10 зображено залежність рівняння стану транспортного потоку як  $V(\rho)$ .

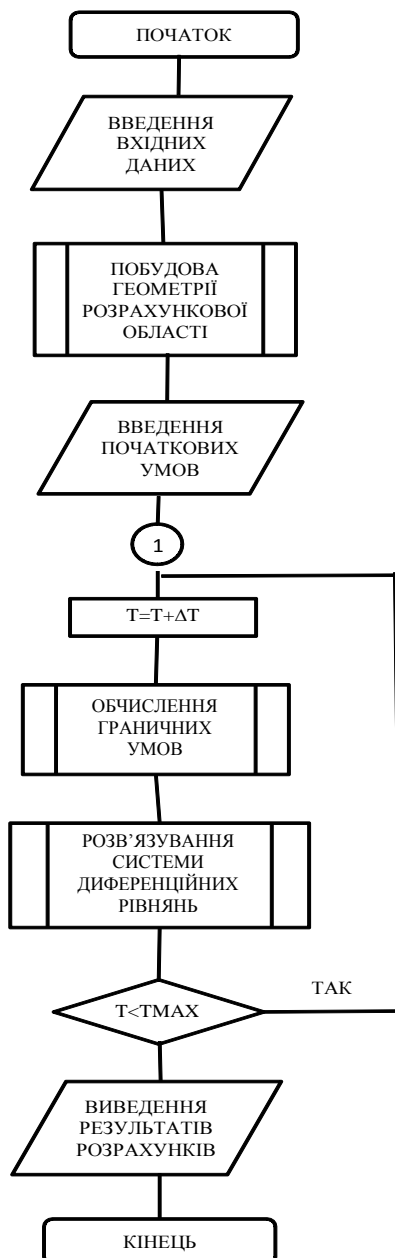


Рис. 1.8. Алгоритм розв'язування задачі

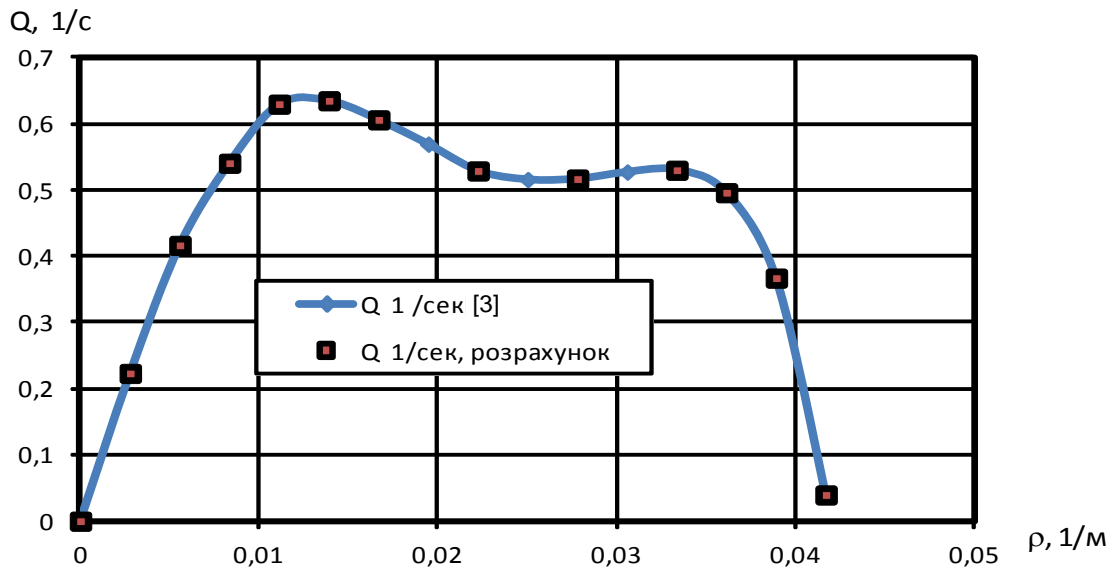


Рис. 1.9. Фундаментальна діаграма

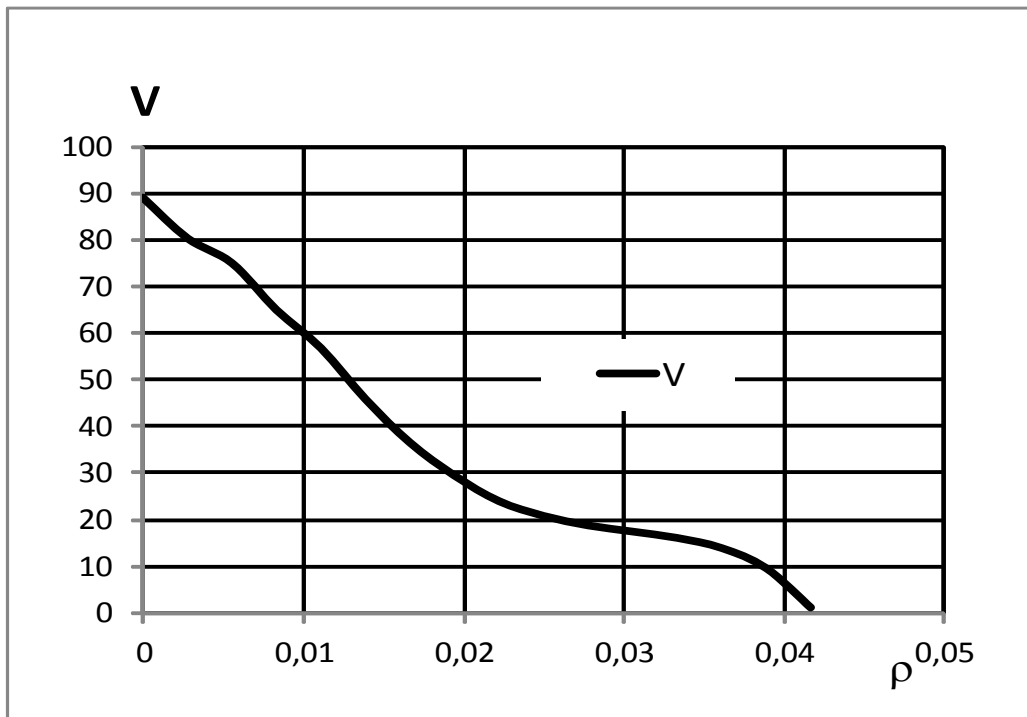


Рис. 1.10. Рівняння стану транспортного потоку

Результати розрахунків мають характер графіка, подібного до результатів роботи [3]. Величину швидкості на графіку (рис. 1.10) подано в км/год, а густину потоку автомобілів – в авт./с.

### 1.8. Математичне моделювання переїзду перехрестя транспортним потоком

Моделювання переїзду перехрестя транспортним потоком важливо, оскільки затори автомобільних транспортних засобів у більшості випадків утворюються на перетині доріг. Пропускна спроможність перехрестя виявляється незадовільною. Завдання пошуку організації переїзду через перехрестя доріг розглядається в цілій низці праць [1, 2, 3, 56]. Пропонуються різноманітні варіанти організації дорожнього руху.

Розглядається задача переїзду транспортним потоком багатосмугового регульованого перехрестя. Математична модель базується на використанні теорії систем масового обслуговування (СМО). Причому інтенсивність обслуговування не є сталою і змінюється.

Приймається, що в період, коли проїзд заборонений, тобто горить червоний сигнал світлофора, інтенсивність обслуговування дорівнює нулю. Числом обслуговуючих каналів  $m$  є кількість смуг для проїзду перехрестя в один бік ( $m = 1, 2, 3$ ). Як модель системи масового обслуговування обирається система з обмеженою чергою, тоді кількість місць у черзі  $n$  дорівнює кількості автомобілів, які розташуються на смузі руху впродовж відведеного відрізка дороги. Таким чином:

$$n = \frac{L}{l} m, \quad (1.47)$$

де  $L$  – довжина відведеного відрізка дороги,

$l$  – довжина транспортного засобу разом з динамічними габаритами.

Як свідчать спостереження, зазвичай значення кількості місць у черзі становить 10–30 автомобілів. За такого підходу передбачається, що машина, яка під'їхала в мить, коли весь відведений відрізок дороги «забитий», залишає систему. Можна також розглянути як модель систему з необмеженою чергою. Проте насправді черги перед світлофорами обмежені. Для спрощення моделі вважатимемо, що потік транспортних засобів, які надходять, найпростіший з інтенсивністю  $\lambda$  авт./с.

Завдання полягає в дослідженні залежності довжини черги від інтенсивності вхідного потоку, а також у віднаходженні оптимального режиму роботи світлофора із заданими інтенсивностями вхідного потоку транспортних засобів.

Як критерії оптимальності можуть бути обрані:

- середня довжина черги або середній час очікування в черзі;
- ймовірність того, що кількість машин у черзі перевищить задане значення тощо.

Для розрахунку характеристик переїзду перехрестя транспортним потоком як СМО під час руху автомобілів в один бік однією смугою можна використати одноканальну модель системи масового обслуговування з об-



меженою чергою. Нехай  $T$  – довжина повного циклу світлофора, а зелена фаза становить половину довжини циклу  $\tau = \frac{1}{2}T$ . Інтенсивність обслуговування  $\mu(t)$  можна задати періодичною функцією з періодом  $T$ :

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0, & t - \left[ \frac{t}{T} \right] T < \tau \\ 0, & t - \left[ \frac{t}{T} \right] T > \tau \end{cases}, \quad (1.48)$$

де  $[x]$  – ціла частина числа;

$\mu_0$  – інтенсивність проїзду перехрестя із дозволяючим сигналом світлофора, тобто інтенсивність потоку обслуговування в «зеленій» фазі;

$T$  – довжина повного циклу світлофора;

$\lambda$  – інтенсивність вхідного потоку;

$n$  – максимальна довжина черги.

За досить великих значень числа  $n$  місць у черзі показники роботи системи з обмеженою чергою будуть близькі до показників системи з необмеженою чергою.

Прийнемо позначення станів, що розглядається СМО:

$S_i^{(1)}$  – відсутність автомашин у цьому напрямку безпосередньо перед стоп-лінією;

$S_i^{(2)}$  – одна автомашина здійснює проїзд;

$S_i^{(3)}$  – одна автомашина здійснює проїзд перехрестя й одна перебуває перед ним і так далі;

$S_i^{(n)}$  – усі місця в черзі зайняті, тобто весь відрізок дороги заповнений автомашинами.

Граф станів такої системи зображено на рис. 1.11.

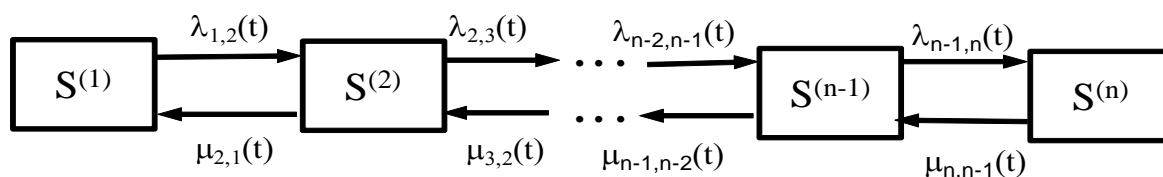


Рис. 1.11. Граф стану системи

Згідно з теорією марковських ланцюгів із безперервним часом, система диференціальних рівнянь Колмогорова матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= -\lambda_{1,2}(t)p_1 + \mu_{2,1}(t)p_2, \\
\frac{dp_2}{dt} &= \lambda_{1,2}(t)p_1 - \mu_{2,1}(t)p_2 - \lambda_{2,3}(t)p_2 + \mu_{3,3}(t)p_3, \\
\frac{dp_3}{dt} &= \lambda_{2,3}(t)p_2 - \mu_{3,2}(t)p_3 - \lambda_{3,4}(t)p_3 + \mu_{4,3}(t)p_4, \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\
\frac{dp_{n-1}}{dt} &= \lambda_{n-2,n-1}(t)p_{n-2} - \mu_{n-1,n-2}(t)p_{n-1} - \lambda_{n-1,n}(t)p_{n-1} + \mu_{n-1,n}(t)p_n, \\
\frac{dp_n}{dt} &= \lambda_{n-1,n}(t)p_{n-1} - \mu_{n,n-1}(t)p_n.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

У системі рівнянь (1.49)  $p_i(t)$  – ймовірність того, що у момент часу  $t$  система перебуває в стані  $S_i$ .

Зазначена система диференціальних рівнянь незамкнута. Для її замикання необхідно задати нормувальну умову:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_{n-1}(t) + p_n(t) = 1. \tag{1.50}$$

Для отримання скінченного аналогу системи диференціальних рівнянь слід скористатися розкладанням функції  $P(t)$  за часом:

$$p = p_0 + \frac{1}{1!} \frac{dp}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 p}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} p}{dt^{n-1}} (\Delta t)^{n-1} + \frac{1}{2!} \frac{d^n p}{dt^n} (\Delta t)^n, \tag{1.51}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - p_0}{\Delta t} + R_n, \tag{1.52}$$

де залишковий член становить:

$$R_n = \frac{1}{2!} \frac{d^2 p}{dt^2} (\Delta t) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} p}{dt^{n-1}} (\Delta t)^{n-2} + \frac{1}{2!} \frac{d^n p}{dt^n} (\Delta t)^{n-1}.$$

Розв'язувати вихідну систему рівнянь (1.49) можна явним або неявним методом.

Явні методи мають чітке обмеження за величиною кроку за часом. Неявні методи мають менш чіткі обмеження кроку за часом.

Виразимо похідну стану системи за часом через вираз (1.52).









Усі коефіцієнти матриці  $A$ , які розташовуються вище наддіагоналі та нижче піддіагоналі, дорівнюють нулю.

Такі системи рівнянь розв'язуються методом прогонки.

Зазначена система диференціальних рівнянь незамкнута. Для її замикання необхідно додати нормувальну умову.

Розроблено алгоритм та програмне забезпечення для розв'язування даної задачі як явним, так і неявним методами з урахуванням нормувальної умови (1.50).

Задача розв'язувалась за таких параметрів транспортного потоку: інтенсивність вхідного потоку –  $\lambda = 0,2$  авт./с; середній час перетину перехрестя – 2 с; тривалість повного циклу світлофора – 60 с; тривалість зеленої фази – 30 с; допустима довжина черги – 30 автомобілів.

Система рівнянь (1.49) розв'язувалась числовим методом.

На рис. 1.12 зображено залежність середньої довжини черги  $r(t)$  від часу для тих самих значень параметрів системи:

$$r(t) = \sum_{k=1}^n k p_{n+1}(t). \quad (1.62)$$

### Результати

На графіках (рис. 1.12) добре видно, що досліджувані параметри роботи системи наближаються до періодичних функцій. Середня довжина черги наближається до періодичної функції і стабілізується в інтервалі 6–7 авт.

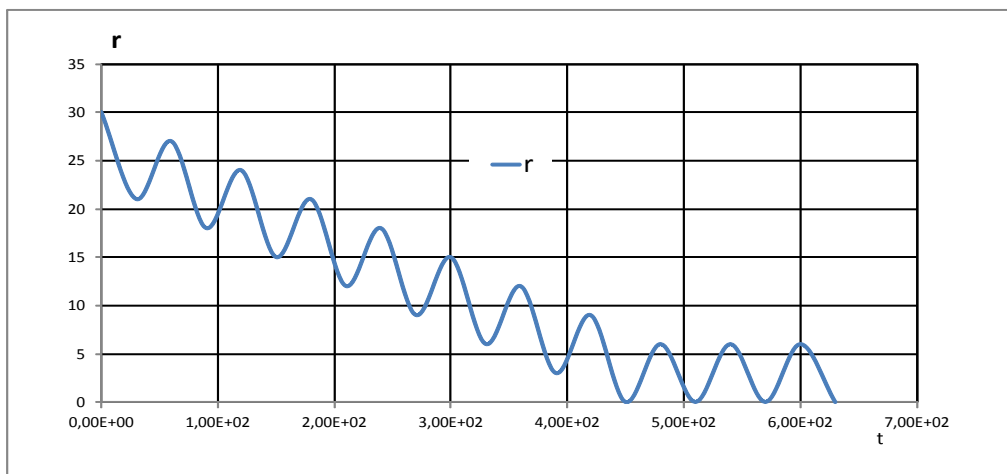


Рис. 1.12. Середня довжина черги

Таким чином, за допомогою числового моделювання можна вивчати закономірності динаміки транспортних потоків: наприклад, залежності середньої довжини черги від інтенсивності вхідного потоку і режиму роботи світлофора. Коректне розв'язування вихідних диференціальних рівнянь Колмогорова дає змогу встановити залежності шуканих параметрів від часу та величини інтенсивності вхідного потоку.

## 1.9. Результати і перспективи подальших досліджень

У праці розглядається задача моделювання динаміки транспортних потоків автомобільних транспортних засобів. Розглянуто сучасні підходи до моделювання транспортних потоків: макромоделювання, мікромоделювання, мезомоделювання.

Ту чи іншу модель транспортного потоку слід обирати відповідно до фізичної постановки завдання. Для розв'язування складної задачі треба побудувати ієрархію спрощених моделей. При цьому необхідно встановити, який рівень потрібно використати в тому чи іншому випадку.

Метод розв'язування задачі з динаміки транспортних потоків має узгоджуватися із заявленою точністю розрахунку та витратами на його розробку. Високорівневі моделі потребують значних часових затрат на їх розробку та відповідних ресурсів електронно-обчислювальних машин.

Запропоновано математичну модель динаміки транспортного потоку, де враховується ціла низка факторів, двовимірність транспортного потоку, опір руху, перешкоди руху тощо.

Розроблено методику розрахунку характеристик транспортних потоків на основі гідрогазодинамічної аналогії. Для опису фізичного процесу використано систему рівнянь Нав'є–Стокса. Систему рівнянь Нав'є–Стокса для стисливого газу спрощено з відповідними поясненнями. В результаті розроблено методику, алгоритм розв'язування задачі, та програмне забезпечення. Для числового інтегрування системи диференціальних рівнянь використано скінченно-об'ємний метод. Проведено тестування розробленої методики. За результатами числових розрахунків побудовано фундаментальну діаграму транспортного потоку.

Для розрахунку параметрів руху транспортного потоку через перехрестя проведено моделювання динаміки транспортного потоку як системи масового обслуговування. Процеси вважалися марковськими. Розроблено методику, алгоритм та програмне забезпечення для розв'язування даної задачі як явним, так і неявним методами.

У подальших дослідженнях у розробці математичних моделей слід урахувати психологічно-емоційний стан водія.

### Список використаних джерел:

1. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков / Хейт Ф. – М. : Мир, 1966.
2. Иносэ Х. Управление дорожным движением / Х. Иносэ, Т. Хамада. – М. : Транспорт, 1983.
3. Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учеб. пособие / [А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. Нурминский и др. ; *Приложения*: М. Л. Бланк, Е. В. Гасникова, А. А. Замятин, В. А. Малышев, А. В. Колесников, А. М. Райгородский] ; под ред. А. В. Гасникова. – М. : МФТИ, 2010. – 362 с.



4. Дубелир Г. Д. Городские улицы и мостовые / Дубелир Г. Д. – К. : Типография Пономарева, 1912. – 407 с.
5. Lighthill M. J. On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads / M. J. Lighthill, G. B. Whitham // Proc. R. Soc. London. – 1955. Ser. A. – V. 229. – P. 281–345.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Уизем Дж. – М. : Мир, 1977.
7. Richards P. I. Shock Waves on the Highway / P. I. Richards // Oper. Res. – 1956. – V. 4. – P. 42–51.
8. Pipes L. A. An operational analysis of traffic dynamics / L. A. Pipes // J. Appl. Phys. – 1953. – V. 24. – P. 274–281.
9. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков / В. И. Швецов // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.
10. Prigogine I. Kinetic theory of vehicular traffic / I. Prigogine, R. Herman. – N. Y. : Elsevier, 1971.
11. Кудрявцев О. К. Применение теории вероятностей к расчетам движения городского транспорта / О. К. Кудрявцев // Сб. науч. сообщений о городском транспорте и движении. – М. : Изд-во Министерства коммунального хозяйства РСФСР, 1958.
12. Бируля А. К. Методы исследования движения на автомобильных дорогах / А. К. Бируля // Труды Харьковского автомобильно-дорожного института. – 1954. – № 17. – С. 13–33.
13. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем: пособие / Бусленко Н. П. – М. : Наука, 1968. – 356 с.
14. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими : монография / Д. Дрю. – М. : Транспорт, 1972. – 424 с.
15. Payne H. J. Models of freeway traffic and control, in: Simulation Council Proc. 28, Mathematical Models of Public Systems / Payne H. J. ; edited by G. A. Bekey. – 1971. – V. 1. – P. 51–61.
16. Kerner B. S. Cluster effect in initially homogeneous traffic flow / Kerner B. S., Konhäuser P. // Phys. Rev. E. – 1993. – V. 48. – P. 2335–2338.
17. Kerner B. S. Structure and parameters of clusters in traffic flow / B. S. Kerner, P. Konhäuser // Phys. Rev. E. 1994. – V. 50. – P. 54–83.
18. Kerner B. S. Asymptotic theory of traffic jams / B. S. Kerner, S. L. Klenov, P. Konhäuser // Phys. Rev. E. 1997. – V. 56. – P. 4200–4216.
19. Aw A. Resurrection of – second order models of traffic flow A. Aw, M. Rasle // SIAM Journal of Applied Mathematics. 2000. – V. 60. – P. 916–938.
20. Kerner B. S. The Physics of Traffic / Kerner B. S. – Berlin : Springer, 2004.
21. Kerner B. S. Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three – phase traffic theory / Kerner B. S. – Berlin : Springer, 2009.

22. Newell G. F. Nonlinear effects in the dynamics of car – following / G. F. Newell // Oper. Res. – 1961. – V. 9. – P. 209–229.
23. Kerner B. S. Deterministic microscopic three-phase traffic flow models / B. S. Kerner, S. L. Klenov // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – V. 39. – P. 1775–1809.
24. Двумерная модель автомобильных потоков / Ю. Н. Карамзин, М. А. Трапезникова, Б. Н. Четверушкин, Н. Г. Чурбанова // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18. – № 6. – С. 85–95.
25. Макро- и микроскопические модели для описания движения автотранспорта на многополосных магистралях / Б. Н. Четверушкин, М. А. Трапезникова, И. Р. Фурманов, Н. Г. Чурбанова // Труды МФТИ. – 2010. – № 4 – С. 163–168.
26. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков / А. Б. Сухинова, М. А. Трапезникова, Б. Н. Четверушкин, Н. Г. Чурбанова // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21. – № 2. – С. 118–126.
27. Дослідження транспортних і пішохідних потоків на перетинах міських магістралей в різних рівнях [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://bespalov.me/2012/02/05/issledonanie-transportnih-i-peshehodnih-potokov>
28. Збір, обробка і оцінка інформації в ході дослідження транспортних і пішохідних потоків на перетинах міських магістралей на різних рівнях та підходах до них [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://bespalov.me/2012/02/22/zbir-brobka-i-ozinka-informazii>
29. Ахмадинуров М. М. Оптимизация светофорного регулирования с помощью программы моделирования транспортных потоков / М. М. Ахмадинуров // Вестник Южноуральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2010. – № 22 (198). – С. 26–30.
30. Ахмадинуров М. М. Модели массового обслуживания в задаче оптимизации работы светофора / М. М. Ахмадинуров, Г. А. Тимофеева // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – № 1. – С. 217–227.
31. Приступа А. В. Имитационная модель перекрестка с двухфазным светофорным регулированием / А. В. Приступа // Вестник Томского государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 3 (24). – С. 138–142.
32. Тимофеева О. П. Проектирование интеллектуальной системы управления светофорами на основе нейронной сети / О. П. Тимофеева, Е. М. Малышева, Ю. В. Соколова // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6. – С. 35–43.
33. Тарасов О. В. Оптимизация режимов работы объектов светофорного регулирования методами нечеткой логики / О. В. Тарасов, С. Н. Корнилов // Современные проблемы транспортного комплекса России. – 2012. – № 2. – С. 139–144.

34. Traffic flow theory: A state-of-the-art report / editors Gartner N. H., Messer C. J., Rathi A. K. – Washington DC : Transportation Research Board, 2001.
35. Иносэ Х. Управление дорожным движением / Х. Иносэ, Т. Хамада. – М. : Транспорт, 1983.
36. Payne H. J. Models of freeway traffic and control / H. J. Payne ; edited by Bekey G. A. // Simulation Council Proc. 28, Mathematical Models of Public Systems. – 1971. – V. 1. – P. 51–61.
37. Newell G. F. Nonlinear effects in the dynamics of car – following / G. F. Newell // Oper. Res. – 1961. – V. 9. – P. 209–229.
38. Helbing D. Traffic and related self-driven many particle systems / D. Helbing // Reviews of modern physics. – 2001. – V. 73. – № 4. – P. 1067–1141.
39. Gazis D. C. Traffic science / Gazis D. C. – N. Y. : Wiley, 1974.
40. Treiber M. Explanation of observed features of selforganization in traffic flow / M. Treiber, D. Helbing. 1999.
41. Treiber M. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulation / M. Treiber, A. Hennecke, D. Helbing // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 62. – P. 1805–1824.
42. Cremer M. Fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations / M. Cremer, J. A Ludwig // Math. Comp. Simul. – 1986. – V. 28. – P. 297–303.
43. Nagel K. Cellular automation model for freeway traffic / K. Nagel, M. A. Schreckenberg // Phys. I France. – 1992. – V. 2. – P. 2221–2229.
44. Chowdhury D. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems / D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider // Phys. Rep. – 2000. – V. 329. – P. 199–329.
45. Nagatani T. The physics of traffic jams / T. Nagatani // Reports on Progress in Physics. – 2002. – V. 65. – P. 1331–1386.
46. Фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов / Дж. Фон Нейман. – М. : УРСС, 2010.
47. Burghout W. Mesoscopic Simulation Models for Short-Term Prediction / W. Burghout // Stockholm, Royal Institute of Technology: Centre for Traffic Research, 2005.
48. Buckley D. J. A Semi-Poisson Model of Traffic Flow / D. J. Buckley // Transportation Science. – 1968. – Vol. 2. – №. 2. – P. 107–132.
49. Branston D. Models of Single Lane Time Headway Distributions / D. Branston // Transportation Science. – 1976. – Vol. 10. – P. 125–148.
50. Hoogendoorn S. P. A New Estimation Technique For Vehicle Type Specific Headway Distributions / S. P. Hoogendoorn, P. H. L. Bovy // Transportation Research Record. – 1998. – Vol. 1646. – P. 18–28.

51. Prigogine I. A Boltzmann-like Approach to the Statistical Theory of Traffic Flow / I. Prigogine // Operations Research. – 1960. – Vol. 8. – № 6. – P. 789.

52. Hoogendoorn S. P. Modelling Multiple User-Class Traffic Flow / S. P. Hoogendoorn, P. H. L. Bovy // Transportation Research B. – 2000. – Vol. 34. – № 2. – P. 123–146.

53. Anvari B. A new microscopic model for the simulation of shared space schemes / B. Anvari. – 2013.

54. Вентцель Е. С. Исследование операций / Вентцель Е. С. – М. : Советское радио, 1972. – 552 с.

55. Zavalichshin D. S. Mathematical Modelling of Vehicle Flow on a Cross'roads / D. S. Zavalichshin, G. A. Timofeeva // Proceedings of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control, July 8–10. – 2009. – P. 849–852.

56. Ахмадинуров, М. М. Математические модели управления транспортными потоками / М. М. Ахмадинуров, Д. С. Завалицин, Г. А. Тимофеева : монография. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2011. – 120 с.

## **2. ОРГАНІЗАЦІЯ МАРШРУТІВ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ПАСАЖИРІВ У МІСЬКОМУ І ПРИМІСЬКОМУ СПОЛУЧЕННІ**

### **2.1. Оптимізація пасажирських перевезень у вузлах мегаполісів**

Серед критеріїв, що характеризують якість дорожнього руху, як найбільш суттєві виокремлюють: зменшення надмірного рівня шуму, зменшення забруднення навколишнього середовища, мінімізацію витрат палива, а також запобігання утворенню та поширенню транспортних заторів.

Питання моделювання транспортного потоку в транспортних вузлах важливе та перспективне у розв'язанні поточних транспортних проблем сучасних міст. Рух транспорту у великих мегаполісах світу зводиться до режиму «стоп-старт» [1]. Це створює проблеми як для водіїв, так і для пасажирів. Моделювання може здійснюватися в межах окремих вузлів (мікрорівень) або ж у масштабі всього міста (макрорівень), а рівні взаємопов'язані.

Складність дослідження транспортних потоків міст полягає у впливі різних чинників, серед яких нестабільність і різноманіття самих потоків, суперечливість критеріїв управління дорожнім рухом та непередбачуваність дорожніх умов, а також складнощі у прийнятті та виконанні рішень щодо управління.

Удосконалення транспортної системи міста потребує розробки нових підходів із використанням як математичного моделювання, так і інших методів.

Моделювання як інструмент дослідження має такі цілі та завдання [2].

1. Моделювання транспортних потоків у масштабі міської агломерації спрямоване на виконання таких завдань, як аналіз: змін у роботі транспортної системи у разі введення нових елементів (наприклад, ліній метро, радіальних або кільцевих автомагістралей); змін у транспортній системі міста під час будівництва нового житлового району або утворення центру тяжіння відвідувачів; перерозподілу транспортних та пасажирських потоків у разі змін в елементах транспортної системи; впливу на роботу системи економічних чинників (плата за проїзд магістраллю або за в'їзд у центральну частину міста, введення зонного тарифу в метро тощо); ефекту від упровадження автоматизованих систем управління вуличним рухом.

2. Завдання локального характеру: аналіз ефектів від перепланування окремого перехрестя або групи перехресть, розширення проїжджої частини вулиці, зміни в організації руху на перетинах, оптимізація світлофорного регулювання, зміна умов пересадки пасажирів і т. д.

3. Завдання аналізу роботи вулично-дорожньої мережі, пасажирського і вантажного транспорту.

Моделювання транспортної ситуації може проводитися на будь-який розрахунковий термін – від оперативних завдань сьогодні до довгострокової (20–30 років) перспективи [2].

Історичний аналіз моделювання транспортних процесів і транспортної інфраструктури наведено в працях В. В. Семенова [3].

Основи математичного моделювання закономірностей дорожнього руху були закладені в 1912 р. російським вченим, професором Г. Д. Дубеліром [4].

Виокремлення математичних досліджень транспортних потоків у самостійний розділ прикладної математики та фактично започаткування Traffic Science – математичної теорії транспортних потоків – було здійснено Ф. Хейтом. У 1960 р. видано першу у світовій літературі монографію з теорії транспортних потоків, в якій систематизовано накопичені на той час результати досліджень.

Питання моделювання транспортних потоків вичерпно викладено в багатьох статтях, монографіях та навчальних посібниках вітчизняних і закордонних вчених. Дослідженню транспортної інфраструктури, впливу транспортних потоків на різні аспекти сучасного життя, оптимізації транспортних мереж, прийняття управлінських рішень приділяється увага в наукових працях таких вчених, як Т. В. Бутько, В. В. Скалозуб, В. Н. Лівшиць, П. А. Стенбринк, П. Н. Розенштейн-Родан, Є. Симоніс, П. Друкер, В. Ростю, Дж. Бастіа та ін. [5–8]. Питанням моделювання та оптимізації транспортних потоків присвячено дослідження [9–11]. Питання автоматизації управління рухом, використання навігаційно-інформаційних систем, розробки та впровадження системи автоматизованого контролю транспортних потоків з метою зведення до мінімуму кількості заторових ситуацій розглянуто в [12].

У моделюванні дорожнього руху історично склались два основних підходи: детерміністичний і стохастичний. В основі детермінованих моделей лежить функціональна залежність між окремими показниками, що характеризують рух автомобілів у потоці. Вони будуються за середніми значеннями та є простішими. Стохастичні моделі будуються з урахуванням випадкового розподілу показників, які характеризують окремі елементи прийнятого математичного опису процесу руху та можуть забезпечити більш об'єктивне відтворення різноманітних фрагментів дорожнього руху. У моделюванні використовують ЕОМ, що прискорює процес дослідження та дає змогу використовувати великі масиви вихідних даних.

Усі моделі транспортних потоків можна поділити на три класи: моделі-аналоги, моделі проходження за лідером та ймовірнісні моделі.

У моделях-аналогах (макроскопічні моделі) рух транспортного засобу вподібнюється фізичному потоку (гідро- й газодинамічні моделі). У моделях проходження за лідером (мікроскопічні моделі) існує припущення про наявність зв'язку між переміщенням веденого й головного автомобіля в потоці.

У стохастичних моделях транспортний потік розглядається як результат взаємодії транспортних засобів на елементах транспортної мережі. Закономірності формування черг, інтервалів, завантажень на смугах дороги тощо мають також імовірнісний характер [16].

Останнім часом у дослідженнях транспортних потоків почали застосовувати міждисциплінарні математичні ідеї, методи й алгоритми нелінійної динаміки. Їх доцільність обґрунтована наявністю в транспортному потоці стійких і нестійких режимів руху, втрат стабільності зі зміною умов руху (нелінійних зворотних зв'язків), необхідністю у великій кількості змінних для адекватного опису системи [13–17]. Зміна напрямку транспортних потоків (ця операція має дві фази):

- перша – виявлення передзаторових і заторових ситуацій;
- друга – включення відповідних позицій керованих знаків для обходу транспортом заторних ділянок.

Перша операція базується на визначенні середнього часу перебування автомобілів  $T_{пр}$  у контрольованих перетинах, що розташовуються в зоні перехресть, де висока ймовірність затору.

Сама операція виявлення затору базується на перевірці співвідношення:

$$\frac{\sum_{i=1}^r t_{пр}}{r} \geq C,$$

де  $t_{пр}$  – сумарний час наявності автомобілів протягом циклу, наведений в одній смузі;  $r$  – кількість контрольованих циклів (3–5);  $C$  – емпірична константа.

У разі рівності ідентифікується передзаторовий стан, у разі стійкого перевищення – заторовий. Перед початком другої операції – перемикання позицій керованих дорожніх знаків – робиться спроба «розсмоктати» затор збільшенням циклу до максимально можливого і виділенням максимального зеленого сигналу для заторових напрямків. Якщо спроба невдала, то на попередньому перехресті вмикається позиція керованого дорожнього знака, що відгалужує потік (частину потоку) на об'їзні шляхи.

Сучасні підходи, що використовуються для підтримки прийняття рішень у проектуванні та управлінні транспортними потоками в мегаполісах, поки що не дають змоги повністю вирішити питання взаємозв'язку міської агломерації та транспортної системи, координації власне самої транспортної системи з іншими аспектами функціонування міста: розселення, екологія, економіка. Розвиток наукових підходів у даному напрямі потребує детальнішого дослідження та розвитку алгоритмів моделювання і розрахунку транспортних потоків в умовах взаємодії різних видів транспорту з урахуванням різних за своїм змістом критеріїв для оптимізації.

Мета даного дослідження – розвиток підходів для вдосконалення транспортної системи мегаполіса з використанням математичного моделювання взаємодії залізничного транспорту з наземними видами міського пасажирського транспорту. Критеріями оптимізації мають слугувати витрати на очікування пасажирами машин міського пасажирського транспорту (МПС), з одного боку, та витрати на експлуатацію цих машин – з іншого.

Для розв'язання поставлених задач були використані математичні методи, що дають змогу оптимізувати рух громадського транспорту в місті, що сприяє не лише розвантаженню транспортної системи міста, але й веде до позитивних економічних результатів, що виявляється в економії коштів шляхом оптимізації руху громадського транспорту і взаємодії різних видів транспорту.

Особливістю більшості задач такого типу є векторний характер показника ефективності  $i$ -го варіанта взаємодії, який можна привести до скалярного, використовуючи можливості експертної системи. Оптимальне рішення досягається за виконання таких умов:

$$E_i^* = a_1 X_{i1}^* \pm a_2 X_{i2}^* \pm \dots \pm a_r X_{ir}^* \pm \dots \pm a_p X_{ip}^* \rightarrow \min \quad (2.1)$$

та

$$\sum_{r=1}^p a_r = 1, X_{ir}^* = \frac{X_{ir}^s}{\bar{X}_{0r}^s}, \quad (2.2)$$

де  $a_r$  – коефіцієнт, що визначає відносну важливість  $r$ -го параметра щодо інших;  $X_{ir}^*$ ,  $\bar{X}_{0r}^s$  – значення  $r$ -го параметра відповідно для  $i$ -го та базисного (вихідного) варіантів взаємодії двох видів транспорту і більше.

Особливе значення у виборі варіанта взаємодії різних видів транспорту має врахування умов поїздки пасажирів. Для цього використовується таке поняття, як приведена довжина поїздки по ребру  $ij$  транспортного графа, тобто:

$$t_{ij} = t_{ij}^s \varphi_s,$$

де  $\varphi_s$  – коефіцієнт, що враховує регулярність руху, зручність поїздки, посадки та висадки пасажирів та інші фактори під час використання  $s$ -го виду транспорту. Значення коефіцієнта  $\varphi_s$  для різних видів транспорту: тролейбус – 1,25; залізничний транспорт – 1,17; автобус – 1,48.

Для вивезення пасажирів, що прибувають до міста магістральними видами транспорту, слід розрахувати необхідний парк машин міського пасажирського транспорту (МПТ). В основу розрахунку покладено принцип надійності обслуговування пасажирів. Зі збільшенням парку машин черги пасажирів у години пік можна ліквідувати, однак це пов'язано з великими витратами. Тому, використовуючи теорію масового обслуговування, визначають парк машин МПТ, що забезпечуватиме мінімум витрат і при цьому не перевищує допустимий рівень очікування пасажирів МПТ.

#### *Оптимізація режимів взаємодії залізничного та міського транспорту*

Необхідно обрати оптимальний режим взаємодії залізничного та наземних видів міського пасажирського транспорту на головній станції в



робочі дні. Середньодобова кількість пасажирів, що прибувають залізницею, дорівнює 12 000. Вивезення пасажирів з привокзального майданчика здійснюється автобусом, тролейбусом і трамваем. Середня місткість однієї одиниці міського транспорту – 70 пасажирів, середня вартість однієї машино-години – 5,6 *у.г.о.*, а 1 пасажиро-години – 0,2 *у.г.о.*

Погодинний розподіл потоку пасажирів, що прибувають у місто залізничною дорогою, подано в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Години доби	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
% добового прибуття	8,2	14,3	14,1	8,0	4,5	4,0
Прибуття пасажирів	984	1716	1692	960	540	480

З 6 до 12 годин прибуває 6372 пасажири, 53,1 % добового прибуття.

Оптимальна взаємодія міського транспорту із залізничним досягається, якщо сумарні приведені витрати, пов'язані з роботою міського пасажирського транспорту (МПТ) і чеканням пасажирів, мінімальні, тобто:

$$E = E_{ек} + E_{оч} \rightarrow \min, \quad (2.3)$$

де  $E_{ек}$  – приведені витрати, пов'язані з роботою МПТ;  $E_{оч}$  – витрати, пов'язані з чеканням пасажирами вивезення з привокзального майданчика.

Витрати, пов'язані зі зміною парку машин МПТ:

$$E_{ек} = V_{м-г}MT,$$

де  $V_{м-г}$  – вартість 1 машино-години, *у.г.о.*;  $M$  – парк машин МПТ.

Витрати, що пов'язані з очікуванням вивезення пасажирів:

$$E_{оч} = V_{п-г}t_{оч}N(t),$$

де  $V_{п-г}$  – вартість 1 пасажиро-години;  $t_{оч}$  – середній час очікування пасажиром машини МПТ під час вивезення з привокзальної площі;  $N(t)$  – середня кількість пасажирів, що вивозяться за період часу  $T$ .

Ураховуючи, що МПТ працює в умовах значних коливань пасажиропотоків, можуть виникати періоди, коли завантаження машин пере-

вищує одиницю, тобто  $p > 1$ . Тому час очікування машини МПТ слід визначати за формулами:

$$t_{оч} = \beta \bar{I}, (p < 1),$$

$$t_{оч} = \beta \bar{I} + \frac{t}{2} (p - 1), (p > 1),$$

де  $\beta$  – параметр, що дорівнює 0,6–0,8;  $I$  – середній інтервал прибуття машин на площу;  $p$  – рівень завантаження парку машин МПТ;  $t$  – протяжність пікового періоду, коли завантаженість машин МПТ ( $p > 1$ ).

Після підстановки значень  $E_{ек}$  та  $E_{оч}$  у формулу (3) отримуємо явне вираження показника ефективності режиму взаємодії МПТ і залізничного транспорту:

$$E = B_{м-г} MT + B_{п-г} \left\{ \beta \sum_{i=1}^k \frac{1}{M} N_i + \sum_{j=1}^n \left[ \beta \frac{1}{M} + \frac{t_j}{2} (p_m - 1) \right] N_j \right\}, \quad (2.4)$$

де  $N_i, N_j$  – відповідно, кількість пасажирів, що вивозяться з привокзальної площі у міжпікові та пікові періоди.

Очевидно, що показник ефективності залежить від парку машин МПТ і протяжності періоду  $T$ , що розраховується:

$$T = \sum_{i=1}^k t_i + \sum_{j=1}^n t_j.$$

Аналітичні вирази для розрахунку оптимальних значень  $M$  і  $T$  дуже важкі, тому процес пошуку  $M$  і  $T$  відбувається методом перебирання варіантів.

Мінімальна кількість машин МПТ, що забезпечує вивезення пасажирів з привокзальної площі за період  $T$ :

$$M_{min} = \frac{Nt}{Tb_m},$$

де  $Nt$  – кількість пасажирів, що прибувають на привокзальну площу залізничним транспортом за період  $T$ ;  $b_m$  – середня пасажиромісткість 1 машини МПТ.

На першому періоді розрахунків тривалість періоду  $T$  приймається з 6:00 до 10:00, тобто  $T = 4$  год, а  $Nt = 5532$ . Для цього періоду  $M_{\min} \approx 19$  машин.

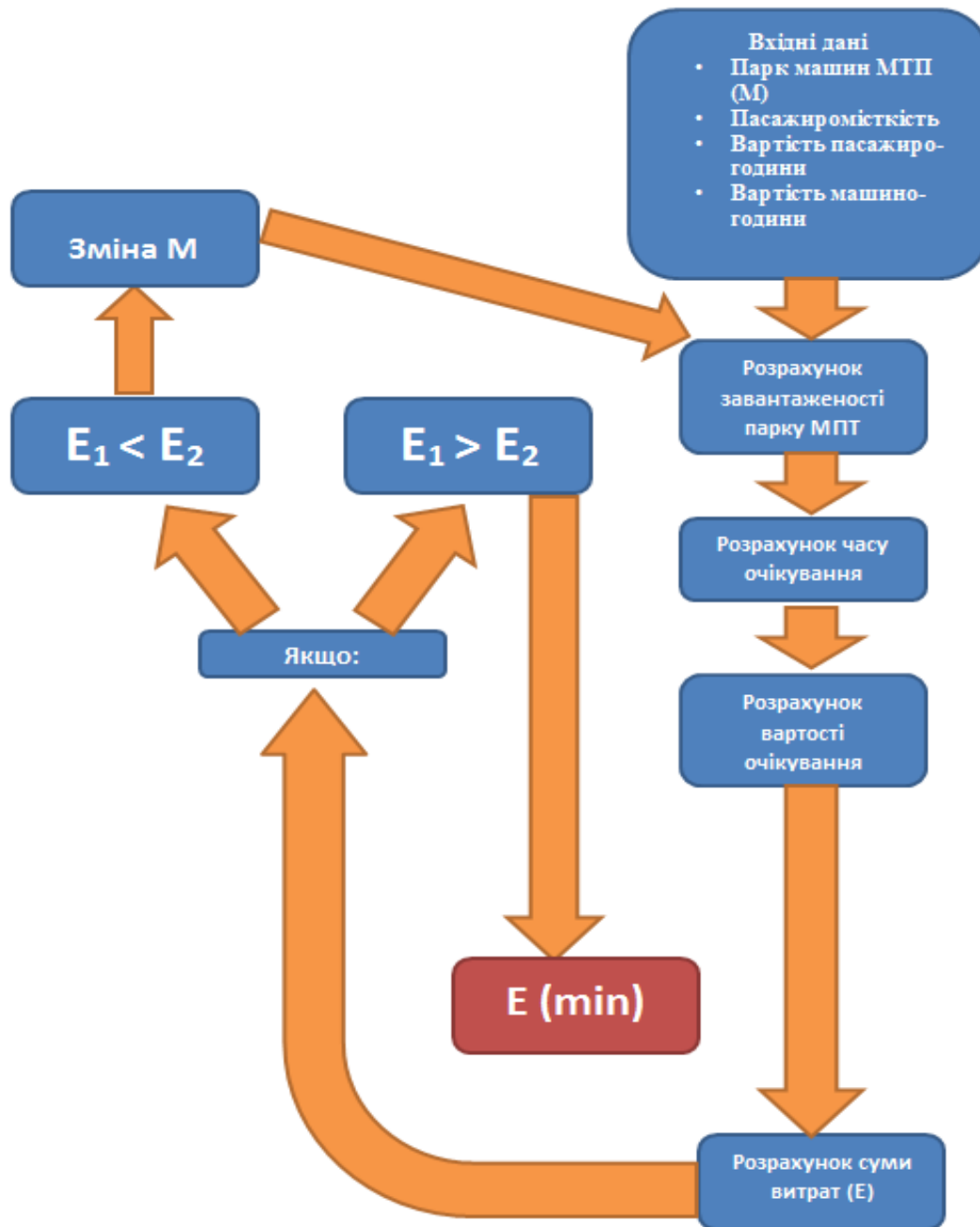


Рис. 2.1. Алгоритм розрахунку параметра ефективності

Проведемо розрахунок параметра ефективності за формулою (2.4) з  $M = 19$  машин, результати розрахунків показано у табл. 2.2.

У процесі обробки інформації та проведення розрахунків використовуватиметься програмування функцій, що дають змогу проводити нові розрахунки з новими вхідними даними автоматично.

1	М (парк машин)=	24	<== Вхідні дані ==>	Пасажиромісткість bm =	70
2					
3	Години доби	Прибуття пасажирів	Рівень завантаженості МТП	t <sub>оч</sub> , год	E <sub>оч</sub> , у.г.о.
4	6-7	984			
5	7-8	1716			
6	8-9	1692			
7	9-10	960			
8	Всього	5352	-	-	0,00
9					
10	β (коефіцієнт завантаження)=	0,7	<=====	Вхідні дані	
11	Вартість пасажиро-години=	0,2			
12	Вартість машино-години=	5,6			
13					
14	Е (економічна ефективність)=		<=====	Результати розрахунку	
15					

Рис. 2.2. Вхідні дані для розв'язання задачі

Рівень завантаженості парку машин МПТ:

$$p = N(t)/(Mb_m).$$

З результатів, отриманих із попередніх розрахунків, можна побачити, що в деякі періоди часу завантаженість МТП становить  $p > 1$ . Розрахунки часу очікування в такому разі проводяться за формулою:

$$t_{оч} = \beta \bar{t} + \frac{t}{2} (p - 1), (p > 1).$$

З 9:00 починається період «розсмоктування» черги. Як показали спостереження за роботою привокзальних площ у цей період:

$$t_{оч}^r = \frac{(t_{оч}^n + t_{оч}^m)}{2},$$

де  $t_{оч}^n$  – час очікування МПТ в останній час пікового періоду;  $t_{оч}^m$  – середній час очікування в першу годину після пікового періоду.

Використовуючи дані з табл. 2.2, легко визначити загальні витрати, пов'язані з експлуатацією парку машин МТП та очікуванням пасажирів ( $M = 19$ ):

$$E(M) = E_{ек} + E_{оч}$$

$$E(19) = 5,6 \times 19 \times 4 + 211,39 = 636,99 \text{ у.г.о.}$$

Таблиця 2.2

Години доби	Прибуття пасажирів	Рівень завантаженості МТП	$t_{оч}$ , год	$E_{оч}$ , у.г.о.
6–7	984	0,74	0,037	7,25
7–8	1716	1,29	0,182	62,45
8–9	1692	1,27	0,318	107,63
9–10	960	0,72	0,177	34,07
Усього	5352	–	–	211,39

Збільшимо парк машин на 2 ( $M = 21$ ) та виконаємо новий крок розрахунків. Результати розрахунків подано в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Години доби	Прибуття пасажирів	Рівень завантаженості МТП ( $p_{M-21}$ )	$t_{оч}$ , год	$E_{оч}$ , у.г.о.
6–7	984	0,67	0,033	6,49
7–8	1716	1,17	0,117	40,49
8–9	1692	1,15	0,193	65,31
9–10	960	0,65	0,113	21,7
Усього	5352	–	–	133,55

Витрати зменшились. Тому виконаємо новий крок розрахунків для парку машин  $M = 24$ . Результати розрахунків наведено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Години доби	Прибуття пасажирів	Рівень завантаженості МТП ( $p_{M-24}$ )	$t_{оч}$ , год	$E_{оч}$ , у.г.о.
6–7	984	0,59	0,029	5,74
7–8	1716	1,02	0,040	13,69
8–9	1692	1,01	0,043	14,70
9–10	960	0,57	0,036	6,97
Усього	5352	–	–	41,10

Витрати зменшились. Тому виконаємо новий крок розрахунків для парку машин  $M = 27$ . Результати розрахунків наведено в табл. 2.5.

Таблиця 2.5

Години доби	Прибуття пасажирів	Рівень завантаженості МТП ( $p_{m-24}$ )	$t_{оч}$ , год	$E_{оч}$ , у.г.о.
6–7	984	0,52	0,026	5,10
7–8	1716	0,91	0,026	8,90
8–9	1692	0,90	0,026	8,77
9–10	960	0,51	0,026	4,98
Усього	5352	–	–	27,75

Подальше збільшення парку машин МТП зменшує час очікування майже до 2 хвилин. Але такий режим взаємодії економічно не вигідний. Показник ефективності  $E(27) = 632,55$  у.г.о. значно перевищує досягнутий на попередньому кроці його рівень. Таким чином, оптимальний режим взаємодії залізничного транспорту з МТП забезпечується в разі підведення на привокзальну площу 24 машин за 1 годину.

#### *Визначення оптимальних інтервалів прямування машин МТП*

Оптимальні значення інтервалів прямування машин МТП визначаються на одинадцяти маршрутах, з яких 1-й, 3-й, 5-й, 11-й обслуговують привокзальну площу. Робочий парк машин МТП становить 203 машини, час обороту і розміри пасажиропотоків подано в табл. 2.6. Важливим резервом підвищення ефективності роботи міського пасажирського транспорту і його взаємодії із залізничним є оптимізація розподілу парку рухомого складу за окремими маршрутами.

Якщо позначити кількість пасажирів на  $i$ -му маршруті протягом періоду часу  $t$  через  $\Pi_i$ , час обороту машини на маршруті  $t_i$ , місткість машини  $B$ , витрати на кожен рейс  $C_i$ , вартість 1 пасажиро-години  $C_{n-2}$ , а робочий парк машин через  $N$ .

Очевидно, що кількість рейсів на кожній лінії має бути достатньою для освоєння пасажиропотоку, тобто  $x_i \geq \Pi_i \div B$ . З іншого боку, кількість рейсів обмежена робочим парком машин:

$$\sum_{i=1}^m t_i x_i = Nt,$$

де  $m$  – кількість маршрутів;  $x_i$  – кількість рейсів на  $i$ -му маршруті.

Таблиця 2.6

Номер маршруту	Час обороту, год	Кількість пасажирів, що перевозяться $i$ -м маршрутом за 1 годину
1	0,57	2500
2	0,50	320
3	0,92	1600
4	0,98	2500
5	1,17	3000
6	1,21	1200
7	1,23	1360
8	0,78	1360
9	0,93	1500
10	9,78	1040
11	0,93	1560

Витрати на перевезення пасажирів міститимуть витрати на виконання рейсів і втрати, пов'язані з очікуванням пасажирів.

З інтервалом руху  $t$ :  $x_i$  середній час очікування становить  $t:2x_i$  (прийнято припущення про рівномірний потік машин), а втрати, пов'язані з очікуванням:

$$E_{очі} = C_{п-г} \Pi_i \frac{t}{2x_i}.$$

Витрати за всіма маршрутами:

$$E = \sum_{i=1}^m C_i x_i + \frac{C_{п-г} t}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\Pi_i}{x_i}. \quad (2.5)$$

Обмеження:

$$\sum_{i=1}^m t_i x_i = Nt \sum_{i=1}^m \Pi_i = \Pi; \quad \sum_{i=1}^m x_i \geq \sum_{i=1}^m \frac{\Pi_i}{B}. \quad (2.6)$$

Функцію (5) подамо в іншому вигляді, вважаючи, що витрати на експлуатацію однієї машини становлять (у.г.о.):

$$E = BtN + \frac{C_{п-г} t}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\Pi_i}{x_i}. \quad (2.7)$$

Аналіз виразу (7) показує, що витрати на виконання рейсів не залежать від  $x_i$ , тобто розподілу рухомого складу за маршрутами, тому для визначення мінімуму функції (7) досить мінімізувати витрати з очікування пасажирів, тобто:

$$T = \sum_{i=1}^m \frac{\Pi_i}{\Pi} t_{oc\ i} \rightarrow \min, \quad (2.8)$$

де  $t_{oc\ i}$  – середній час очікування пасажиром машини на  $i$ -му маршруті.

Для визначення мінімуму функції (2.8) за наявності обмежень (2.6) складемо функцію Лагранжа:

$$F = \sum_{i=1}^m \frac{\Pi_i}{\Pi} \frac{t}{2x_i} + \alpha \left( \sum_{i=1}^m t_i x_i - Nt \right), \quad (2.9)$$

де  $\alpha$  – невизначений множник Лагранжа.

Досліджуючи функцію (2.9) на мінімум, отримуємо:

$$x_i = \sqrt{\frac{\Pi_i t_i}{t_i} \frac{Nt}{\sum_{i=1}^m \sqrt{\Pi_i t_i}}}.$$

Тоді оптимальне значення інтервалу на  $i$ -му маршруті:

$$I_i = \frac{60 \sum_{i=1}^m \sqrt{\Pi_i t_i}}{N \sqrt{\frac{\Pi_i}{t_i}}}.$$

Середні витрати часу пасажира на очікування з оптимальним розподілом парку машин:

$$T = \sum_{i=1}^m \frac{\Pi_i}{\Pi} \frac{\sum_{i=1}^m \sqrt{\Pi_i t_i}}{2N \sqrt{\frac{\Pi_i}{t_i}}}.$$

Таким чином, для скорочення витрат часу пасажирів в очікуванні машин міського пасажирського транспорту на маршрутах 1, 3, 5, 11 витрати мають становити 3,8; 3,7; 2,4; 3,8 хв.



16												
17	Номер маршруту	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18	Час обороту, год.	0,57	0,5	0,92	0,98	1,17	1,21	1,23	0,78	0,93	9,78	0,93
19	Кількість пасажирів, що перевозяться і-м маршрутом за 1 годину	2500	320	1600	2500	3000	1200	1360	1360	1500	1040	1560
20												
21												
22	Парк машин=	203										
24												
25	I (інтервал руху)=	3,8	11,3	3,7	2,9	2,4	3,8	3,5	4,4	3,8	1,4	3,8
26												

Рис. 2.3. Результати розрахунку інтервалів прямування на маршрутах

Необхідно провести оцінку відносного скорочення часу очікування пасажирів від оптимального розподілу машин МПТ у порівнянні з пропорційним розподілом ресурсу машино-годин.

Зазвичай розподіл ресурсу машино-годин парку МПТ відбувається прямо пропорційно витратам пасажиро-годин на  $i$ -му маршруті, тобто:

$$x_{ni} = N \frac{\Pi_i t_i}{\sum \Pi_i t_i}$$

Таблиця 2.7

Маршрут	Кількість необхідних рейсів	Інтервал руху на кожному маршруті
1	$x_{n1} = 17,16$	$I_{n1} = 3,5$ хв
2	$x_{n2} = 1,93$	$I_{n2} = 31$ хв
3	$x_{n3} = 17,6$	$I_{n3} = 3,4$ хв
4	$x_{n4} = 30$	$I_{n4} = 2$ хв
5	$x_{n5} = 42,8$	$I_{n5} = 1,4$ хв
6	$x_{n6} = 17,6$	$I_{n6} = 3,4$ хв
7	$x_{n7} = 17,6$	$I_{n7} = 3$ хв
8	$x_{n8} = 17,6$	$I_{n8} = 4,7$ хв
9	$x_{n9} = 17,6$	$I_{n9} = 3,6$ хв
10	$x_{n10} = 9,23$	$I_{n10} = 6,5$ хв
11	$x_{n11} = 17,6$	$I_{n11} = 3,4$ хв

У разі оптимального розподілу парку машин МПТ час очікування пасажирами  $T_o = 466$  пасажиро-годин.

За пропорційного розподілу:  $T_n = 544$  пасажиро-години.

Відносне скорочення часу очікування пасажирами машин МПТ становить:  $\Delta = \frac{T_n - T_o}{T_o} 100\%$ ;  $\Delta = 16,7\%$ .

Розглянуто актуальні питання організації та управління процесами функціонування транспортної мережі міста, наведено приклад розрахунку оптимальної роботи транспортного комплексу, що функціонує в місті.

Запропонована модель взаємодії залізничного та міського пасажирського транспорту для оптимізації вивезення пасажирів з привокзальної площі в години пік. Оптимізація даної операції містить ідею, що витрати на очікування пасажирами машин МПТ і витрати на експлуатацію цих машин мають зводитися до мінімуму.

На основі запропонованого алгоритму з метою отримання ефективного розв'язку на підставі заданих вхідних даних визначається парк машин МПТ, за якого забезпечуються оптимальні (мінімальні) витрати на очікування міського транспорту і його експлуатацію.

У ході розрахунків було визначено, що найбільшій економічній ефективності із заданими вхідними даними можна досягти з парком машин МПТ, що становить 24 машини, тоді витрати на очікування транспорту і його експлуатацію будуть мінімальними. Також встановлено, що інтервали прямування машин МПТ за такого розподілу для скорочення витрат часу пасажирів в очікуванні машин міського пасажирського транспорту на маршрутах 1, 3, 5, 11, що обслуговують привокзальну площу, мають становити 3,8; 3,7; 2,4; 3,8 хв. Додатково визначено інший (оптимальний) тип розподілу парку машин МПТ, що може дати більшу ефективність на цих маршрутах. У порівнянні результатів, отриманих під час пропорційного оптимального розподілу, та відносне скорочення часу очікування пасажирами машин МПТ становить 16,7 %.

Проаналізовано проблеми створення заторів у транспортній системі міста і шляхи їх подолання на підставі оптимізації взаємодії різних видів транспорту. Основну увагу приділено саме проблемі громадського пасажирського транспорту і впровадженню нових заходів, що можуть оптимізувати рух транспорту залежно від потреб населення, що приведе до економії коштів і часу, а також певним чином вплине на ситуацію з утворенням заторів у місті в цілому. Аналіз основних причин виникнення заторів на дорогах та шляхів їх подолання, закладених в основі розробки математичних моделей, алгоритмів і методів розподілу пасажирських потоків у містах, мінімізації кількості пасажирських транспортних засобів на маршрутах, визначення раціональних параметрів маршрутної мережі міського транспорту має стати підґрунтям для створення чітких графіків руху громадського транспорту.

## **2.2. Обґрунтування параметрів перевезень на міських і міжміських маршрутах Дніпропетровської області**

Основне завдання міжміських та міських пасажирських перевезень – забезпечення транспортом населення, вдосконалення перевізного процесу та покращання якості обслуговування пасажирів [18]. У різних регіонах

України існують проблеми в системі пасажирського транспорту, пов'язані з утворенням заторів, незадовільним станом доріг, підвищенням ціни за проїзд, зменшенням безпеки руху та зниженням якості надання послуг тощо [19]. Недостатньо ефективного функціонування транспортно-дорожнього комплексу, низькі темпи впровадження ресурсощадних технологій перешкоджають нормальному функціонуванню міст та їх подальшому розвитку.

Актуальність викладених підходів полягає в обґрунтуванні параметрів перевезень на міських і міжміських маршрутах Дніпропетровської області, яка є одним з найбільших промислових, економічних, культурних та історичних центрів країни та має велику щільність населення – близько 100 осіб/км<sup>2</sup>.

З розвитком урбанізації, розширенням економіки та зміною кількості населення міст питання аналізу, класифікації та розрахунків пасажирських потоків стає все більш актуальним. Визначення характеристик пересувань населення як одних із ключових показників для розвитку міських територій, є предметом багатьох досліджень, що проводилися у вітчизняній і закордонній практиці транспортного планування. Основне джерело даних для створення моделі, наближеної до реальності, – матриця кореспонденцій [20].

Проблему розподілу пасажирських переміщень вулично-дорожньою мережею міста досліджувала низка вчених, серед яких Б. І. Грановський, П. Ф. Горбачов, Є. М. Гецович, Є. В. Любий, С. Ю. Гончаренко, Ю. Шеффі, Н. Оппенхайм, Ж. Ортузар та ін. [21–25].

Відповідно до традиційного підходу процес транспортного планування системи пасажирських перевезень містить чотири етапи: генерування пересувань (trip generation) – оцінка загальних обсягів прибуття і відправлення з кожної транспортної зони території планування; кореспонденція пересувань (trip correspondence) – отримання матриць кореспонденцій, які визначають обсяги пересувань між кожною парою зон, що досліджуються; розподіл кореспонденцій за типом пересування (modal split); розподіл кореспонденцій за шляхом пересувань (network assignment) [26].

Пасажиropотоки мешканців міста за маршрутами громадського транспорту з використанням масивів даних операторів стільникового зв'язку про трансаkції абонентів досліджено в [27]. Дані, що використовуються для формування матриці кореспонденцій, відображають пересування населення (пасажиropотоки).

Підхід до побудови матриць кореспонденцій у системі міського пасажирського транспорту, який базується на використанні інфрачервоних лічильників пасажиropотоку та інтеграції із системою GPS, запропоновано в [28].

Мета дослідження – обґрунтування параметрів пасажирських перевезень міжміськими сполученнями в регіоні, на прикладі Дніпропетровської області із застосуванням гравітаційного методу під час складання матриці кореспонденцій на основі наявної транспортної мережі.

Для цього необхідно виконати такі завдання:

1. Розробити багатокроковий алгоритм маршрутизації пасажирських перевезень у регіоні із застосуванням гравітаційного методу, визначенням ємностей мегарайонів на основі аналізу інформації з доступних джерел.

2. Провести моделювання пасажирських перевезень для міст у Дніпропетровської області для наявної транспортної мережі.

Матриця транспортних кореспонденцій відображає попит у транспортній системі та є необхідною частиною моделювання транспортних мереж. Для розв'язання задачі розробки міжміських перевезень пасажирів Дніпропетровської області застосовано гравітаційний алгоритм пошуку матриці пасажирських кореспонденцій [29]. Матриця кореспонденції відображає кількісну характеристику пересувань у межах території планування, елементами якої є обсяги пересувань (наприклад, автомобілів чи пасажирів за годину) між кожною парою умовних транспортних зон. Щоб створити матрицю кореспонденцій у мережі, наближену до реальності, необхідно розбити територію планування на транспортні райони [20–21], умовно поділяючи на окремі групи: за цілями пересувань, за вибором типу та маршруту пересування тощо [26]. Для кожної із цих груп пересувань будується окрема матриця міжзональних кореспонденцій, вхідною інформацією для побудови якої є загальні обсяги прибуття і відправлення у кожній зоні [27].

Одним із найскладніших завдань у визначенні характеристик транспортних потоків є саме отримання матриці кореспонденцій. Для створення графічної моделі здійснено укрупнене районування у спосіб, запропонований у [30], з визначенням ємностей мегарайонів та відстаней між їх центрами на основі аналізу наявної інформації відкритих джерел в Internet [31–35].

Запропонований алгоритм розрахунку матриці пасажирських кореспонденцій із використанням гравітаційного методу зображено на рис. 2.4 (а, б). Прийняті в блок-схемі позначення:

$l_{ij}$  – довжина найкоротшого шляху між  $i$ -м та  $j$ -м районами, км;

$V$  – швидкість руху транспортного засобу, км/год;

$N_p$  – кількість мешканців району, тис. чол.;

$H_j$  – трудова ємність району, тис. чол.;

$N_m$  – чисельність населення міста, тис. чол.;

$N$  – кількість робочих місць у районі, тис. чол.;

$k_j$  – коефіцієнт балансування.

Алгоритм містить такі етапи.

Етап I. Формування вихідних даних для розв'язання задачі – отримання інформації з доступних джерел та аналіз її особою, що приймає рішення (ОПР). Після перевірки на релевантність формується внутрішня база даних (блоки 1–5).

Етап II. Створення координатної моделі транспортної мережі. Для цього потрібно у двовимірній системі координат у масштабі відобразити центри транспортних районів та зв'язати їх між собою, щоб центр кожного транспортного району мав не менше трьох і не більше чотирьох зв'язків з іншими центрами (блок 6).

Етап III. Визначення довжини шляхів пересування між районами на основі даних вимірювання за отриманою координатною моделлю транспортної мережі. Вибір найкоротших зв'язків серед наявних у транспортній мережі ( $l_{ij}$ ) та їх упорядкування (блок 7).

Визначення часу руху між транспортними районами і складнощі сполучення (блоки 8, 9).

Етап IV. Визначення місткості транспортних районів та перевірка умови балансу (блоки 10–12).

Етап V. Визначення матриці кореспонденцій на основі реалізації ітераційного процесу з оновленням коефіцієнта балансування на кожній ітерації, поки не буде досягнуто заданої точності для кожного району (блоки 13–18).

Етап VI. Аналіз отриманих рішень ОПР та формування пропозицій щодо маршрутів пасажирських перевезень (блоки 19–21).

Розглянемо застосування алгоритму аналізу кореспонденцій для мережі міст у Дніпропетровській області. Розрахунки проведено в середовищі електронних таблиць Microsoft Excel.

Насамперед розглянемо першу десятку населених пунктів, що мають найбільшу чисельність населення.

*Етап 1, 2.* Для обраних населених пунктів дані щодо кількості мешканців та населення, яке працює, а також географічні координати ( $X$  – східної довготи,  $Y$  – північної широти) подано в табл. 2.8 [32, 33]. Координатна модель транспортної мережі зображена на рис. 2.5.

*Етап 3, 4.* Довжину шляхів пересування між районами ( $l_{ij}$ ), отриману на основі вимірювання для наявних у транспортній мережі зв'язків, подано в табл. 2.9 [34–35].

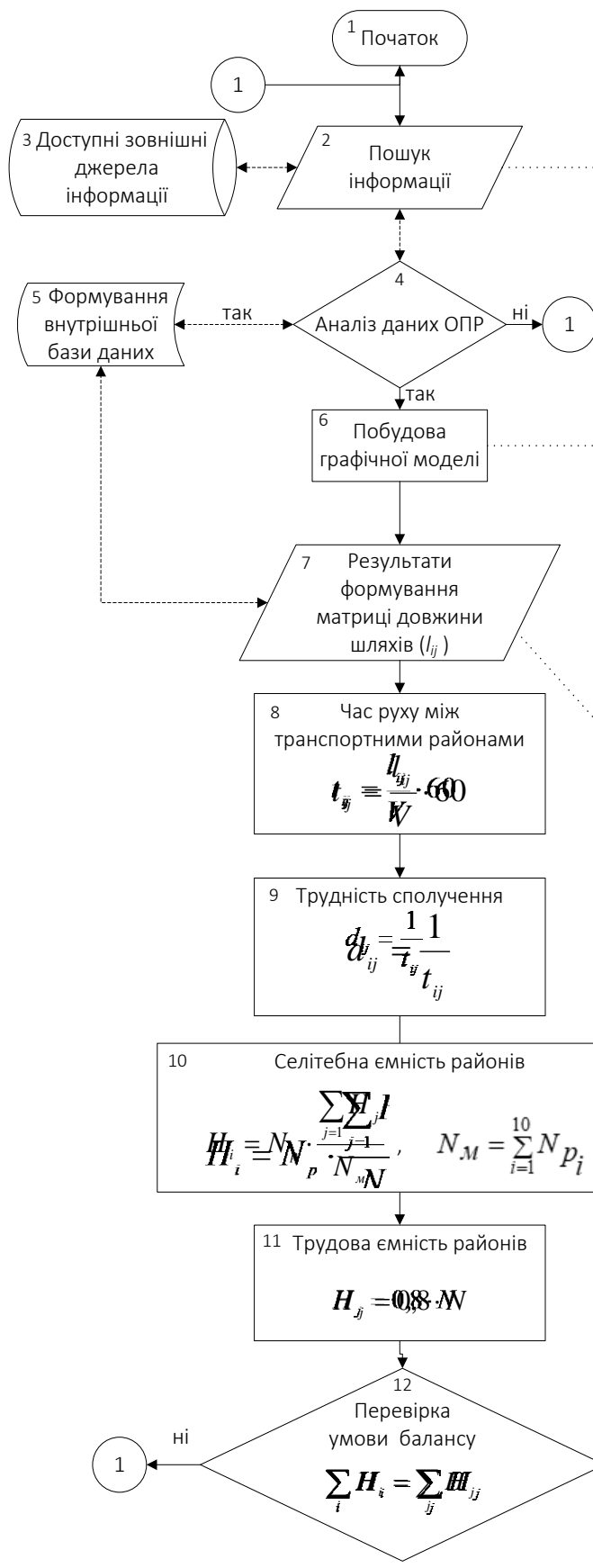
Результати розрахунку часу руху між транспортними районами і складнощі сполучення подано в табл. 2.10–2.11.

Швидкість руху транспортного засобу – 20 км/год. Час на пересування всередині району – 2 хв.

Таблиця 2.8

### Вхідні дані для аналізу мережі міст Дніпропетровської області з найбільшою кількістю населення [32, 33]

№	Назва міста	Мешканці, тис. осіб ( $N_{Pi}$ )	Населення, що працює, тис. осіб ( $H_i$ )	Координати	
				$X$ , град. сх. д.	$Y$ , град. півн. ш.
1	Дніпро	1002,1	632,4	35°01'05"	48°28'00"
2	Кривий Ріг	624, 5	301,5	33°20'36"	47°54'31"
3	Кам'янське	233, 3	147,3	34°36'47"	48°30'27"
4	Нікополь	109,03	57,4	34°23'35"	47°33'56"
5	Павлоград	104,3	52,8	35°52'12"	48°31'12"
6	Новомосковськ	70,4	40,6	35°13'26"	48°37'58"
7	Марганець	46, 6	24,1	34°37'00"	47°38'53"
8	Жовті Води	44, 1	21,7	33°30'54"	48°21'24"
9	Покров	39,04	17,6	34°04'52"	47°39'47"
10	Синельникове	37,2	12,7	35°30'43"	48°19'04"

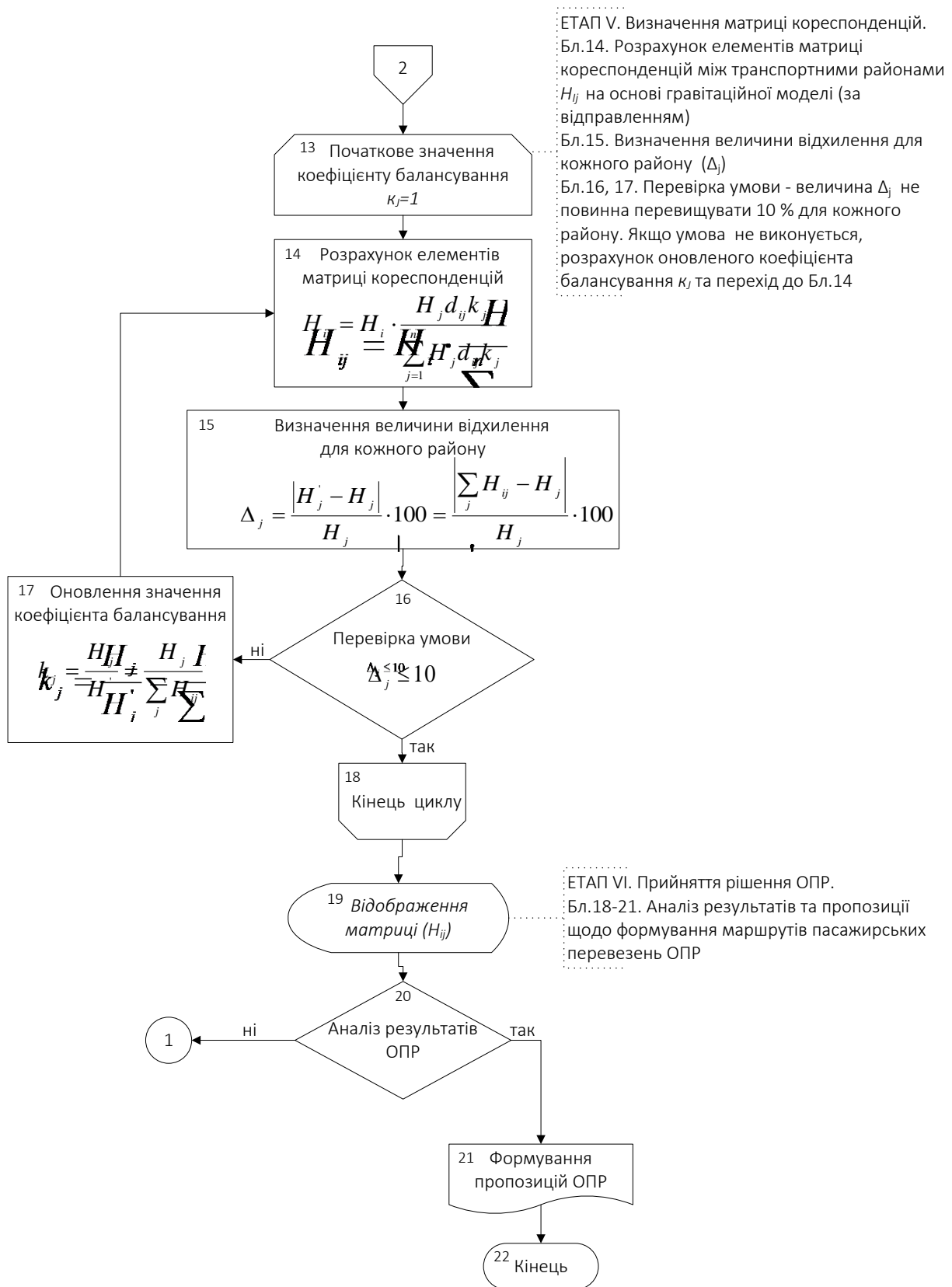


ЕТАП I. Формування вихідних даних.  
 Бл.2-3. Пошук та аналіз інформації із доступних зовнішніх баз даних (Internet-джерел).  
 Бл.4. Вибір релевантної інформації особою, що приймає рішення (ОПР).  
 Бл.5. Формування внутрішньої бази даних для вирішення поставленої задачі.

ЕТАП II. Побудова графічної моделі.  
 Бл.6. Створення координатної моделі транспортної мережі. Відображення у двомірній системі координат центрів транспортних районів та зв'язування їх між собою. Центр кожного транспортного району має не менше трьох і не більше чотирьох зв'язків з іншими центрами.

ЕТАП III. Визначення параметрів мережі.  
 Бл.7. Визначення довжини шляхів пересування між районами на основі даних вимірювання за отриманою координатною моделлю транспортної мережі.  
 Бл.7. Вибір серед існуючих в транспортній мережі зв'язків найкоротших.  
 Бл.7. Упорядкування результатів вимірювань та формування матриці довжини шляхів ( $l_{ij}$ ).  
 Бл.8. Визначення часу руху між транспортними районами та формування матриці ( $t_{ij}$ )  
 Бл.9. Визначення трудності сполучення та формування матриці ( $d_{ij}$ )

ЕТАП IV. Визначення місткості транспортних районів.  
 Бл.10. Визначення селітебної ємності районів, що представляє кількість мешканців району, або кількість відправлень ( $H_i$ )  
 Бл.11. Визначення трудової ємності району або кількості прибуття ( $H_j$ ). Визначається в припущенні, що в певний період часу (годину "пік") в райони прибуває 80% всіх працюючих та культурно-побутові пересування у цей час відсутні.  
 Бл.12. Перевірка умову балансу місткості транспортних районів.



б

Рис. 2.4. Блок-схема алгоритму формування маршрутів пасажирських перевезень на основі гравітаційного методу

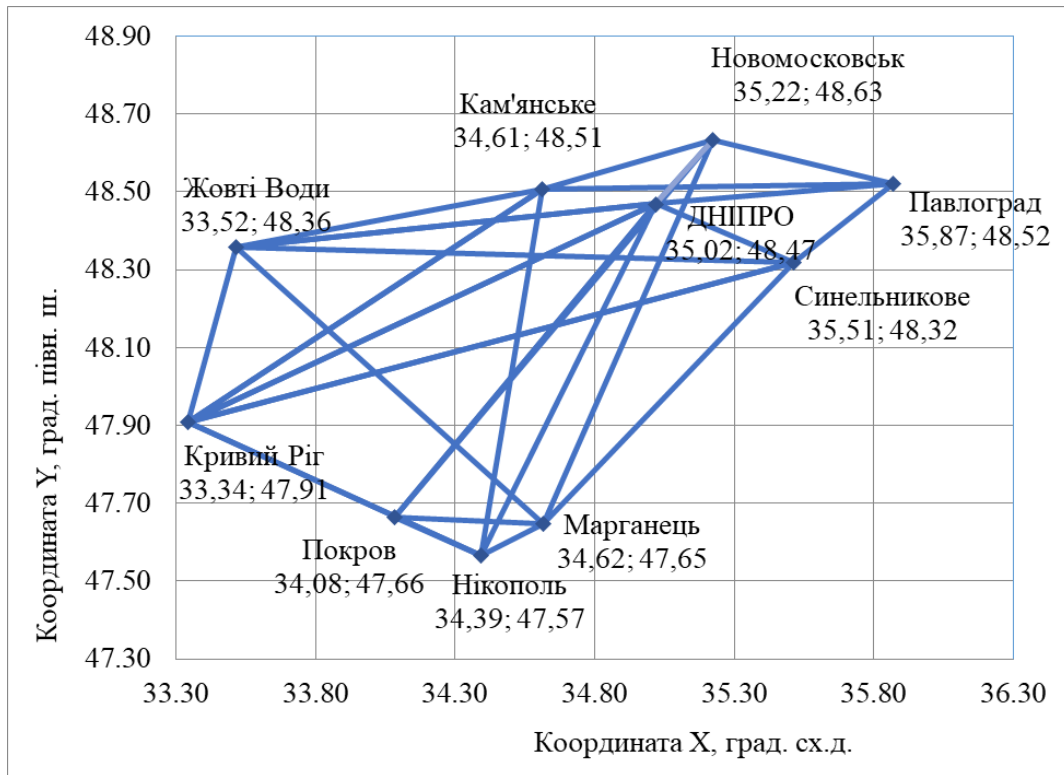


Рис. 2.5. Графічне зображення транспортної мережі Дніпропетровської області, що має найбільшу чисельність населення

Таблиця 2.9

**Матриця найкоротших шляхів між містами Дніпропетровської області з найбільшою кількістю населення, км**

Номер транспортного району відправлення	Номер транспортного району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. Дніпро	0	144	38	122	81	30	121	131	147	54
2. Кривий Ріг	144	0	128	106	233	171	134	67	77	195
3. Кам'янське	38	128	0	125	120	69	143	110	132	93
4. Нікополь	122	106	125	0	202	151	29	151	27	150
5. Павлоград	81	233	120	202	0	54	201	207	228	40
6. Новомосковськ	30	171	69	151	54	0	149	155	176	52
7. Марганець	121	134	143	29	201	149	0	150	55	128
8. Жовті Води	131	67	110	151	207	155	150	0	115	173
9. Покров	147	77	132	27	228	176	55	115	0	172
10. Синельникове	54	195	93	150	40	52	128	173	172	0



Таблиця 2.10

**Час руху між транспортними районами, хв**

Номер транспортного району відправлення	Номер транспортного району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	432	114	366	243	90	363	393	441	162
2	432	2	384	318	699	513	402	201	231	585
3	114	384	2	375	360	207	429	330	396	279
4	366	318	375	2	606	453	87	453	81	450
5	243	699	360	606	2	162	603	621	684	120
6	90	513	207	453	162	2	447	465	528	156
7	363	402	429	87	603	447	2	450	165	384
8	393	201	330	453	621	465	450	2	345	519
9	441	231	396	81	684	528	165	345	2	516
10	162	585	279	450	120	156	384	519	516	2

Результати визначення місткості транспортних районів подано в табл. 2.12 (селітебну і трудову ємність району).

Таблиця 2.11

**Складність сполучення між транспортними районами (помножені на  $10^{-3}$ , крім діагональних елементів)**

Номер транспортного району відправлення	Номер транспортного району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,5	2,3	8,8	2,7	4,1	11,1	2,8	2,5	2,3	6,2
2	2,3	0,5	2,6	3,1	1,4	1,9	2,5	5,0	4,3	1,7
3	8,8	2,6	0,5	2,7	2,8	4,8	2,3	3,0	2,5	3,6
4	2,7	3,1	2,7	0,5	1,7	2,2	11,5	2,2	12,3	2,2
5	4,1	1,4	2,8	1,7	0,5	6,2	1,7	1,6	1,5	8,3
6	11,1	1,9	4,8	2,2	6,2	0,5	2,2	2,2	1,9	6,4
7	2,8	2,5	2,3	11,5	1,7	2,2	0,5	2,2	6,1	2,6
8	2,5	5,0	3,0	2,2	1,6	2,2	2,2	0,5	2,9	1,9
9	2,3	4,3	2,5	12,3	1,5	1,9	6,1	2,9	0,5	1,9
10	6,2	1,7	3,6	2,2	8,3	6,4	2,6	1,9	1,9	0,5

Таблиця 2.12

### Результати визначення місткості транспортних районів

Номер транспортного району	Показник	
	Селітебна ємність району ( $H_i$ ), тис. чол.	Трудова ємність району ( $H_j$ ), тис. чол.
1	453,79	505,92
2	282,80	241,20
3	105,65	117,84
4	49,37	45,92
5	47,23	42,24
6	31,88	32,48
7	21,10	19,28
8	19,97	17,36
9	17,84	14,08
10	16,85	10,16

*Етап 5.* Значення елементів матриці кореспонденцій між транспортними районами визначаємо за допомогою гравітаційної моделі (за відправленням).

Результати розрахунку елементів матриці  $Y$  на першій ітерації з прийнятим значенням коефіцієнта балансування  $k_j = 1$  подано в табл. 2.13.

Таблиця 2.13

### Значення елементів матриці $Y$ на першій ітерації

Номер району відправлення	Номер району прибуття										$\Sigma y_{ij}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	252,96	0,56	1,03	0,13	0,17	0,36	0,05	0,04	0,03	0,06	255,40
2	1,17	120,60	0,31	0,14	0,06	0,06	0,05	0,09	0,06	0,02	122,56
3	4,44	0,63	58,92	0,12	0,12	0,16	0,04	0,05	0,04	0,04	64,55
4	1,38	0,76	0,31	22,96	0,07	0,07	0,22	0,04	0,17	0,02	26,01
5	2,08	0,35	0,33	0,08	21,12	0,20	0,03	0,03	0,02	0,08	24,32
6	5,62	0,47	0,57	0,10	0,26	16,24	0,04	0,04	0,03	0,07	23,44
7	1,39	0,60	0,27	0,53	0,07	0,07	9,64	0,04	0,09	0,03	12,73
8	1,29	1,20	0,36	0,10	0,07	0,07	0,04	8,68	0,04	0,02	11,87
9	1,15	1,04	0,30	0,57	0,06	0,06	0,12	0,05	7,04	0,02	10,41
10	3,12	0,41	0,42	0,10	0,35	0,21	0,05	0,03	0,03	5,08	9,81

Умова відповідності вихідної величини трудової ємності районів і трудової ємності, що отримана у результаті розподілу кореспонденцій за гравітаційною моделлю, виконується лише для першого, третього і п'ятого транспортних районів. Тому розрахуємо нові значення коефіцієнта балансування (блок 17, рис. 16) і проведемо обчислення матриці кореспонденцій на новій ітерації. Дослідним шляхом було встановлено, що необхідно провести 9 ітерацій, щоб у кожному районі було дотримано вимогу (блок 16, рис. 16). Значення коефіцієнтів для ітерацій з 2 до 9 подано в табл. 2.14.

Значення елементів матриці кореспонденцій ( $H_{ij}$ ), отриманої на дев'ятій ітерації, подано в табл. 2.15.

*Етап 6.* Результати розрахунків за кількістю людей, що прибувають до транспортних районів міст Дніпропетровської області з найбільшою чисельністю населення, зображено на рис. 2.6. Кількість людей, що вирушають з транспортних районів, зображено на рис. 2.7.

Таблиця 2.14

### Значення коефіцієнтів балансування $k_j$

Номер ітерації	Номер транспортного району									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,042	0,836	1,141	0,981	0,980	1,333	1,124	1,130	1,084	1,088
2	1,045	0,846	1,124	0,989	0,993	1,218	1,090	1,085	1,049	1,064
3	1,043	0,845	1,126	0,986	0,989	1,257	1,098	1,098	1,061	1,074
4	1,044	0,845	1,126	0,987	0,990	1,243	1,096	1,094	1,056	1,069
5	1,043	0,845	1,126	0,987	0,990	1,248	1,097	1,095	1,058	1,071
6	1,043	0,845	1,126	0,987	0,990	1,246	1,097	1,095	1,057	1,070
7	1,043	0,845	1,126	0,987	0,990	1,247	1,097	1,095	1,058	1,071
8	1,043	0,845	1,126	0,987	0,990	1,246	1,097	1,095	1,058	1,071
9	1,031	0,909	1,067	0,952	0,969	1,109	1,058	1,027	1,003	1,036

Таблиця 2.15

### Матриця кореспонденцій на 9-й ітерації

Номер транспортного району відправлення	Номер транспортного району прибуття										$\Sigma H_{ij}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	444.02	1.782	4.394	0.467	0.650	1.698	0.220	0.183	0.127	0.254	453.79
2	15.722	256.05	4.445	1.833	0.770	1.015	0.677	1.217	0.829	0.239	282.80
3	6.784	0.778	97.18	0.177	0.170	0.287	0.072	0.084	0.055	0.057	105.65
4	2.766	1.229	0.678	43.45	0.132	0.171	0.466	0.080	0.353	0.046	49.37
5	4.232	0.568	0.718	0.146	40.73	0.487	0.068	0.060	0.042	0.177	47.23
6	5.574	0.378	0.609	0.095	0.245	24.80	0.045	0.039	0.027	0.066	31.88
7	2.243	0.782	0.477	0.803	0.107	0.140	16.30	0.065	0.139	0.044	21.10
8	2.124	1.604	0.636	0.158	0.106	0.138	0.074	15.03	0.068	0.033	19.97
9	1.985	1.463	0.555	0.927	0.101	0.127	0.212	0.091	12.34	0.035	17.84
10	5.303	0.567	0.774	0.164	0.567	0.422	0.090	0.060	0.047	8.85	16.85
$H_i = \Sigma n_{ij}$	490.75	265.20	110.47	48.22	43.58	29.29	18.23	16.91	14.03	9.80	-
$d_j, \%$	3.00	9.95	6.26	5.01	3.18	9.83	5.46	2.61	0.34	3.52	-

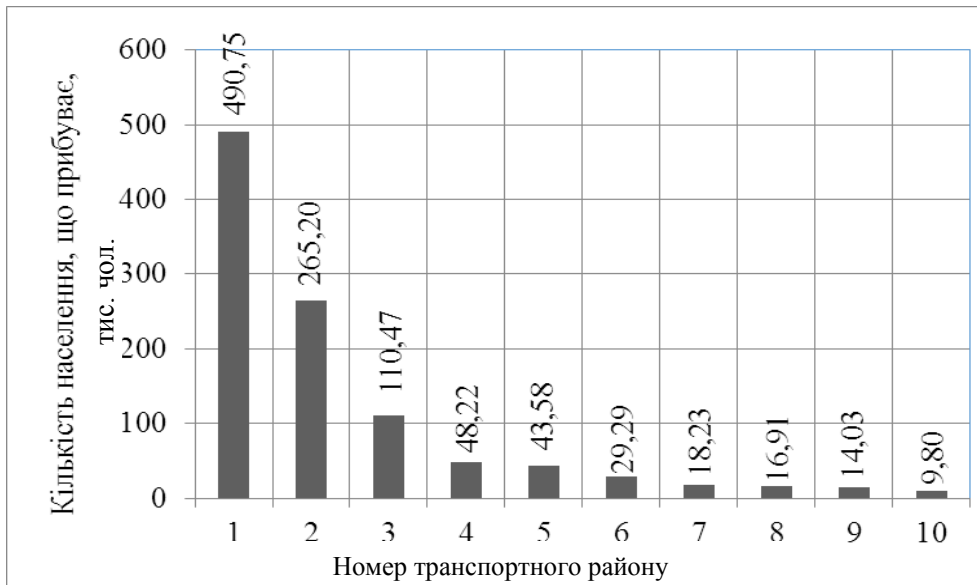


Рис. 2.6. Кількість людей, що прибуває до транспортних районів

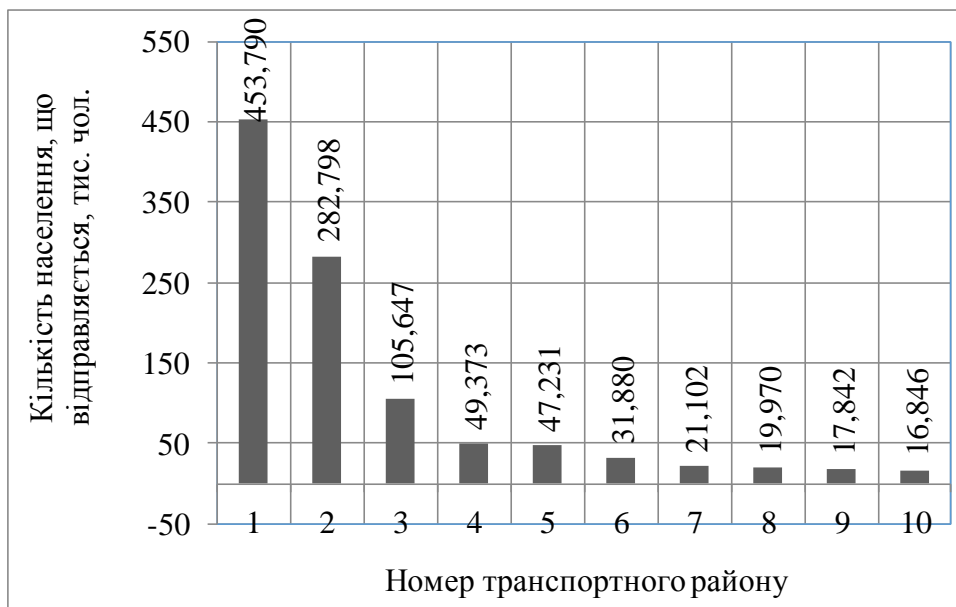


Рис. 2.7. Кількість людей, що вирушають з транспортних районів

Найбільша кількість населення прибуває до таких міст, як Дніпро – 490,75 тис. чол. Кривий Ріг – 265,2 тис. чол. та Кам’янське – 110,45 тис. чол. Це пов’язано з тим, що це найбільші міста за площею і територією та в них найкраще розвинена промисловість і транспортна інфраструктура. Саме ці міста надають найбільшу кількість робочих місць для населення області, будучи регіонально важливими, виконуючи політичні, адміністративні, економічні, соціальні, культурні та наукові функції.

Середню значущість серед розглянутих міст мають Нікополь – 48,22 тис. чол. та Павлоград – 43,59 тис. чол. Це пояснюється меншою чисельністю населення щодо першої трійки міст. Отже, кількість людей, що прибувають, значно менша.

Найменші показники мають Новомосковськ, Марганець, Жовті Води, Покров та Синельникове, що пов'язано з порівняно невеликою чисельністю населення, площею, отже, з незначною кількістю робочих місць.

На основі застосування запропонованого алгоритму проаналізуємо кореспонденції для мережі інших міст, що розташовані поблизу м. Дніпра.

*Етап 1,2.* Дані щодо назви самих населених пунктів та їх показників (кількості мешканців та населення, що працює) наведено в табл. 2.16. Координатна модель даної транспортної мережі зображена на рис. 2.8 [32, 33].

Таблиця 2.16

**Вхідні дані щодо населених пунктів, які розташовані поблизу м. Дніпра [32, 33]**

№	Назва міста	Кількість мешканців, тис. осіб	Населення, що працює, тис. осіб
1	Ювілейне	11 528	5628
2	Обухівка	9178	5213
3	Іларіонове	8495	4295
4	Солоне	7557	3589
5	Карнаухівка	6597	2987
6	Кринички	4657	2056
7	Новомиколаївка	4006	1984
8	Спаське	3145	1426
9	Лобойківка	3047	1228
10	Чаплинка	1978	842

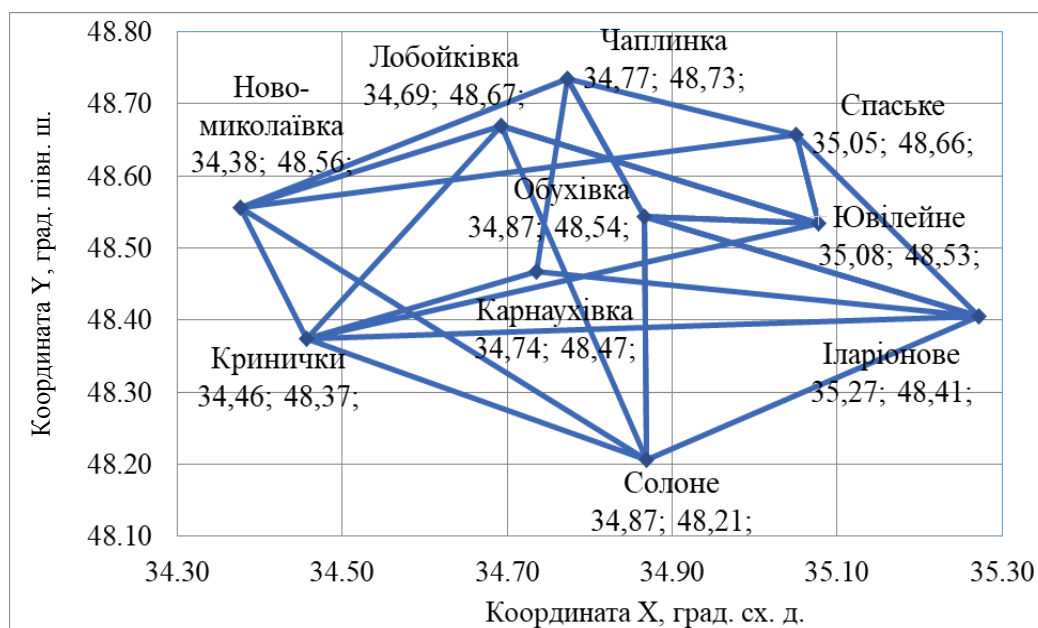


Рис. 2.8. Графічне зображення транспортної мережі міст (табл. 2.16) у географічних координатах

Етап 3, 4. Довжину шляхів пересування між районами ( $l_{ij}$ ), отриману на основі вимірювання для наявних у транспортній мережі (рис. 2.8) зв'язків, наведено в табл. 2.17 [34, 35].

Таблиця 2.17

### Матриця найкоротших шляхів між населеними пунктами транспортної мережі

Номер транспортного району відправлення	Номер транспортного району прибуття									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. Ювілейне	0	18	34	49	43	58	35	21	40	38
2. Обухівка	18	0	43	63	42	65	54	36	24	36
3. Іларіонове	34	43	0	49	50	70	81	46	59	67
4. Солоне	49	63	49	0	40	46	64	66	73	88
5. Карнаухівка	43	42	50	40	0	31	32	54	36	51
6. Кринички	58	65	70	46	31	0	26	76	42	60
7. Новомиколаївка	35	54	81	64	32	26	0	52	37	73
8. Спаське	21	36	46	66	54	76	52	0	56	55
9. Лобойківка	40	24	59	7	36	42	37	56	0	12
10. Чаплинка	38	36	67	88	51	60	73	55	12	0

Етап 5. Методологія обчислення матриці кореспонденцій для заданої транспортної мережі ідентична розрахункам, що проводилися вище. В процесі розрахунків було виконано дві ітерації, після яких умова (блок 16, рис. 2.4б) виконується для всіх районів мережі (табл. 2.18).

Таблиця 2.18

### Матриця кореспонденцій на другій ітерації

Номер транспортного району відправлення	Номер транспортного району прибуття										$\Sigma H_{ij}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	4070.11	160.586	65.693	34.366	33.449	17.426	31.167	37.981	17.912	12.877	4481.57
2	114.418	3290.94	39.426	20.288	25.993	11.802	15.333	16.816	22.659	10.317	3568.00
3	72.701	61.238	3052.09	31.306	26.206	13.153	12.268	15.795	11.063	6.653	3302.48
4	58.622	48.571	48.255	2673.94	38.066	23.260	18.044	12.793	10.390	5.886	2937.82
5	65.068	70.966	46.063	43.409	2224.70	33.618	35.151	15.230	20.522	9.893	2564.62
6	47.058	44.731	32.096	36.822	46.670	1524.94	42.202	10.556	17.159	8.203	1810.43
7	62.029	42.828	22.063	21.052	35.963	31.102	1309.19	12.272	15.494	5.363	1557.35
8	101.101	62.825	37.993	19.963	20.841	10.405	16.414	936.12	10.011	6.961	1222.64
9	47.548	84.420	26.535	168.616	28.005	16.867	20.665	9.983	753.32	28.581	1184.54
10	51.204	57.577	23.905	13.722	20.224	12.079	10.716	10.399	42.815	526.32	768.96
$H_i = \Sigma_{ij}$	4689.86	3924.69	3394.12	3063.48	2500.11	1694.65	1511.15	1077.95	921.34	621.05	-
$A_j, \%$	4.16	5.89	1.22	6.70	4.62	3.03	4.79	5.51	6.22	7.80	-

Етап 6. Кількість населення, що прибуває та відправляється, зображено на рис. 2.9 та 2.10 відповідно.

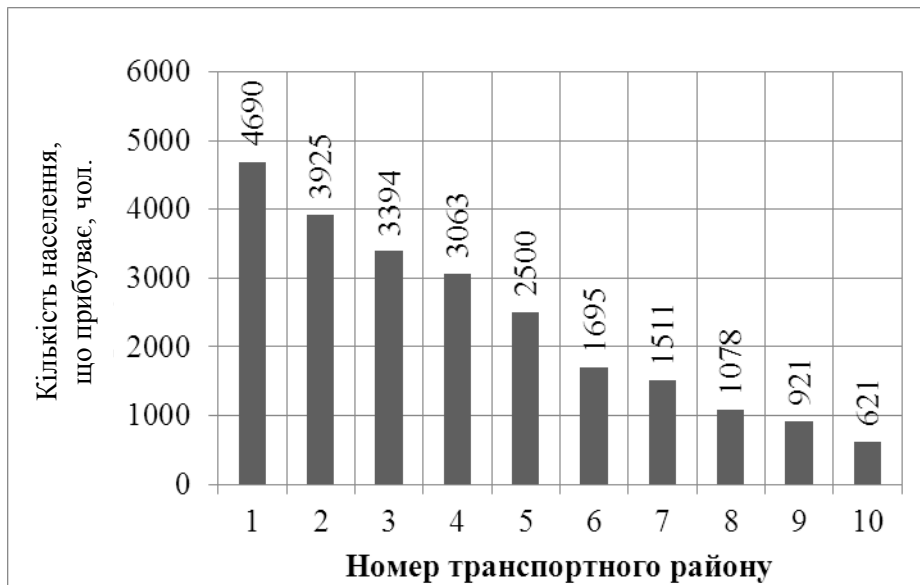


Рис. 2.9. Кількість людей, що прибувають до транспортних районів

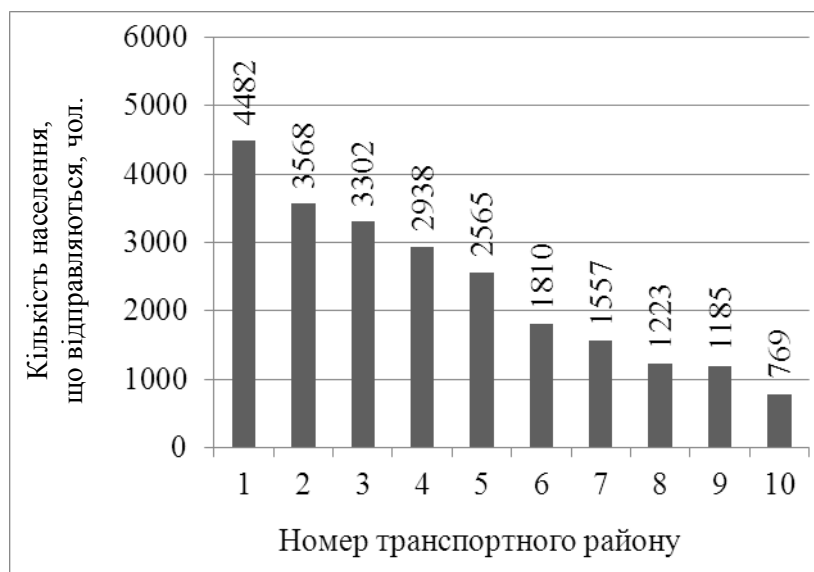


Рис. 2.10. Кількість людей, що відправляються з транспортних районів

Аналіз діаграм прибуття та відправлення (рис. 2.7–2.10) засвідчує, що кількість людей, які переміщуються, залежить від чисельності населення. Чисельність населення тісно пов'язана з кількістю робочих місць, а отже, з розвитком дорожньої інфраструктури та кількістю переміщуваних пасажирів.

Аналіз результатів засвідчив, що кількість робочого населення, яке переміщується, прямо пропорційно залежить від загальної чисельності населення міста, села, їх площі та обласного значення. Чим більше розвинена промисловість, економіка, наука, культура, тим більша кількість населення

переміщується між важливими для області містами. Найбільшими населеними пунктами Дніпропетровської області, між якими здійснюється транспортне сполучення, є Дніпро, Кривий Ріг, Кам'янське, Нікополь та Павлоград; найменшими – Спаське, Лобойківка, Чаплинка.

Рекомендованими маршрутами можуть бути:

- Дніпро–Нікополь через Солоне чи Карнаухівку;
- Кривий Ріг–Кам'янське–Дніпро через Новомиколаївку, Кіровське;
- Синельникове–Дніпро через Іларіонове;
- Павлоград–Дніпро через Ювілейне; Новомосковськ–Дніпро через Ювілейне.

Результати дослідження мають наукову та практичну значущість, адже можуть бути використані у проектуванні та вдосконаленні транспортної інфраструктури Дніпропетровської області, визначенні категорій доріг під час планування автобусного та залізничного дорожнього сполучення між містами і селами. Обґрунтовані параметри міських і міжміських пасажирських перевезень дають змогу визначити час перевезення, кількість рейсів та необхідну кількість і габарити автобусів на день. Кінцеві пункти маршрутів бажано встановлювати між найбільшими містами, адже саме таке з'єднання має найбільшу чисельність переміщуваного населення. Однак треба враховувати розташування маленьких селищ, щоб задовольнити транспортну потребу всього населення Дніпропетровської області з мінімальними витратами та максимальними прибутками.

Розв'язано задачу маршрутизації за умов відповідності вихідної величини трудової ємності районів і трудової ємності, отриманої у результаті розподілу кореспонденцій за гравітаційною моделлю. Даний підхід може бути корисним для з'ясування значення окремих населених пунктів регіону в проектуванні дорожньо-транспортної інфраструктури, ремонті доріг та плануванні маршрутного з'єднання між містами та селами.

#### **Список використаних джерел:**

1. Sipress A. Studying the ebb and flow of stop-and-go; Los Alamos Lab using cold war tools to scrutinize traffic patterns / A. Sipress // Washington post, Thursday, August 5, 1999.

2. Осетрін М. М. Основні принципи створення транспортної моделі міста [Електронний ресурс] / Осетрін М. М., Беспалов Д. О., Дорош М. І. – Режим доступу : <https://bespalov.me>

3. Семёнов В. В. Исторический анализ моделирования транспортных процессов и транспортной инфраструктуры [Электронный ресурс] / В. В. Семёнов, А. В. Ермаков // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2015. – № 3. – 36 с. – Режим доступа : <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-3>

4. Дубелир Г. Д. Планировка городов / Дубелир Г. Д. – СПб., 1910.

5. Бутько Т. В. Формування моделі організації пасажиропотоків при здійсненні пересадок на залізничному вокзалі з використанням колективного інтелекту / Т. В. Бутько, А. В. Прохорченко // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2010. – № 2. – С. 57–67.



6. Скалозуб В. В. Многокритериальные модели задачи анализа транспортных сетей с учетом специализированных свойств носителей потоков / В. В. Скалозуб, Л. А. Паник // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2010. – № 4. – С. 15–21.
7. Daganzo C. F. Remarks on Traffic Flow Modeling and its Applications / C. F. Daganzo // Dept. of Civil and Environmental Engineering University of California, Berkeley, New York, 1999.
8. Daganzo C. F. Macroscopic Relations of Urban Traffic Variables: Bifurcations, Multivaluedness and Instability / C. F. Daganzo, V. Gayah, E. Gonzales // Transportation Research Part B: Methodological. 2011. – 45 (1). – P. 278–288.
9. Киселев А. Б. Оптимальное регулирование автотранспортных потоков / А. Б. Киселев // Ломоносовские чтения : научная конф. Секция механики. Апрель 2005 года. Тезисы докладов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2005. – С. 115–116.
10. Киселев А. Б. Моделирование автотранспортных потоков методами механики сплошной среды / А. Б. Киселев // Ломоносовские чтения : научная конф. Секция механики. Апрель 2007 года. Тезисы докладов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2007.
11. Регирер С. А. Математическая модель взаимодействия движущихся коллективов: общественного транспорта и пассажиров / С. А. Регирер, Н. Н. Смирнов, А. Е. Ченчик // Автоматика и телемеханика. – 2007. – Выпуск 7. – С. 116–131.
12. Приходько В. М. Современные системы управления дорожным движением в мегаполисах [Электронный ресурс] / В. М. Приходько // Сборник докладов 7-й международной конференции «Интеллектуальные и телематические автоматизированные системы управления дорожным движением», 2006. – Режим доступа : [http://www.adf.spbgasu.ru/Conference2006/section\\_3.pdf](http://www.adf.spbgasu.ru/Conference2006/section_3.pdf)
13. Фролов К. В. Формирование показателей и нормативов качества городских автобусных перевозок : диссертация ... кандидата экономических наук / К. В. Фролов. – М., 2005. – 156 с.
14. Сорокин А. А. Моделирование городских пассажирских перевозок : диссертация ... кандидата экономических наук / А. А. Сорокин. – Ставрополь, 2005. – 198 с.
15. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков / В. И. Швецов // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 11. – С. 3–46.
16. Мокін В. Б. Моделювання параметрів транспортної мережі в середовищі автоматизованої системи пошуку оптимальних рішень / В. Б. Мокін // Міжнародний науково-технічний журнал «Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія». – 2010. – № 2 (18). – С. 20–24.
17. Прокудін Г. С. Моделі і методи оптимізації перевезень у транспортних системах : монографія / Г. С. Прокудін. – К. : Нац. тр-й ун-т, 2006. – 224 с.

18. Клименко І. С. Проблеми та перспективи розвитку ринку пасажирських автомобільних перевезень в Україні / І. С. Клименко, С. В. Кривошеєва, О. К. Кривенко // Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського. Серія: Економіка і управління.

19. Дослідження ринку пасажирських перевезень Дніпропетровської області [Електронний ресурс] / Дніпропетровська обласна державна адміністрація. – Режим доступу : <https://adm.dp.gov.ua/dniprooda/pro-oda/departamenti-ta-upravlinnya/upravlinnya-transportu/pitannya-transportu-ta-perevezen/doslidzhennya-rinku-pasazhirskih-perevezen>

20. Гецович Є. М. Побудова матриці транспортних кореспонденцій, транзитних для центральної ділової частини мегаполісу [Електронний ресурс] / Є. М. Гецович, Д. В. Засядько // Автомобільний транспорт. – 2014. – Вип. 34. – С. 60–64. – Режим доступу : [https://dspace.khadi.kharkov.ua/dspace/bitstream/123456789/928/1/11\\_34.pdf](https://dspace.khadi.kharkov.ua/dspace/bitstream/123456789/928/1/11_34.pdf)

21. Гецович Е. М. Транспортное районирование мегаполисов и расчет маршрутов реализации корреспонденций / Е. М. Гецович, Д. В. Засядько // Совершенствование организации дорожного движения и перевозок пассажиров и грузов : сборник тезисов конференции. – Минск, 2010. – С. 26–33.

22. Горбачов П. Ф. Нова концепція моделювання потреб населення у трудових пересуваннях міським пасажирським транспортом / П. Ф. Горбачов // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2009. – № 27. – С. 210–214.

23. Любий Є. В. Підхід щодо формування транспортної моделі системи пасажирського транспорту в малих містах [Електронний ресурс] / Є. В. Любий // Вісник економіки транспорту і промисловості : Проблеми транспортного комплексу України. – Х., 2016. – № 55. – 191 с. – Режим доступу : <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:CoWg5ynzuiEJ:btie.kart.edu.ua/article/download/83395/78750+&cd=2&hl=ru&ct=clnk&gl=ua>

24. Гончаренко С. Ю. Современные проблемы моделирования матриц пассажирских корреспонденций в средних городах / С. Ю. Гончаренко // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – № 56 (1029). – С. 83–88.

25. Sheffy Y. Urban Transportation Networks. Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods [Електронний ресурс] / Sheffy Y. – Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1985. – 415 p. – Режим доступу : [http://web.mit.edu/sheffi/www/selectedMedia/sheffi\\_urban\\_trans\\_networks.pdf](http://web.mit.edu/sheffi/www/selectedMedia/sheffi_urban_trans_networks.pdf)

26. Швецов В. И. Проблемы моделирования передвижений в транспортных сетях / В. И. Швецов // Труды МФТИ. – 2010. – Том 2. – № 4. – С. 169–179.

27. Кара І. А. Визначення пасажиропотоків на міських маршрутах [Електронний ресурс] : дис. ... канд. техн. наук : 05.22.01 / Кара І. А. – Львів, 2017. – 208 с. – Режим доступу : <https://lpnu.ua/sites/default/files/2020/dissertation/1757/diskaraia.pdf>

28. Красноштан О. М. Система побудови матриць кореспонденцій на основі інфрачервоного інтелектуалізованого лічильника пасажирів та системи GPS / О. М. Красноштан // Автомобільний транспорт : науково-виробничий журнал. – 2015. – № 5 (247). – С. 30–32.

29. Карпенко А. П. Популяционные алгоритмы глобальной поисковой оптимизации. Обзор новых и малоизвестных алгоритмов [Электронный ресурс] / А. П. Карпенко // Приложение к журналу «Информационные технологии». – 2012. – № 7. – 32 с. – Режим доступа : <http://is.ifmo.ru/works/2012/karpenko-population-algorithms.pdf>

30. Гецович Е. М. Задача делимитизации центральной деловой части мегаполиса / Е. М. Гецович, М. О. Казакова, О. А. Холодова // Вестник ХНАДУ : сб. науч. тр. – 2009. – Вып. 45. – С. 52–54.

31. Днепропетровская область 2019. Инвестиционный паспорт [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [http://dia.dp.gov.ua/wp-content/uploads/2019/10/Investment\\_passport\\_RU.pdf](http://dia.dp.gov.ua/wp-content/uploads/2019/10/Investment_passport_RU.pdf)

32. Адміністративний устрій. Дніпропетровська обласна державна адміністрація : [сайт]. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://adm.dp.gov.ua/pro-oblast/dnipropetrovshina/administrativnij-ustrij>

33. Дніпропетровська область. *Вікіпедія* : [сайт] [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BD%D1%96%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B2%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0\\_%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C%D0%9C%D1%96%D1%81%D1%82%D0%B0\\_%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE\\_%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BD%D1%96%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B2%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0_%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%82%D1%8C%D0%9C%D1%96%D1%81%D1%82%D0%B0_%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B0%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F)

34. Онлайн карта України. Doroga.ua : [сайт] [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.doroga.ua/Pages/Map.aspx?RegionID=1061>

35. Розрахунок відстаней. Lardi-trans : [сайт] [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://lardi-trans.com/useful/distance>

### **3. ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ОСНОВ В ОБРОБЦІ ДАНИХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ ЕЛЕМЕНТІВ ТРАНСПОРТНИХ КОМУНІКАЦІЙ**

Своєчасна діагностика параметрів багатошарових основ (фундаментів будівель і споруд, дорожніх покриттів, злітно-посадкових смуг тощо) має важливе значення в забезпеченні безпечного руху транспортних засобів [38]. Запропоновано підхід до побудови моделей оцінки механічних і геометричних параметрів таких основ на базі розв'язання обернених задач для багатошарових пружних і пружно-пластичних пакетів [18]. Як вихідні дані для таких задач використовуються виміряні переміщення (або швидкості) певних точок на поверхні основи. Підхід, який ґрунтується на інформаційно-імовірнісній парадигмі аналізу обернених задач, полягає в отриманні апостеріорної щільності ймовірності в просторі невідомих параметрів. Суть підходу полягає в блочно-параметричному наближенні апріорної щільності ймовірності та функції правдоподібності в просторі параметрів і модельних даних задачі. Метод дає змогу оцінити параметри апріорного розподілу діагностованих величин, ідентифікувати і виключити викиди виміряних даних зі створеної моделі, а також побудувати апостеріорну оцінку щільності ймовірності невідомих параметрів з прийнятною роздільною здатністю. Як приклад застосування запропонованого підходу розглянуто задачу визначення геометричних характеристик пружного двошарового пакета (визначення форми границі розділу шарів). Границя розділу шарів апроксимується квадратичним сплайном; параметри такого сплайну розглядались як вектор невідомих параметрів оберненої задачі. Розглянуто питання визначення параметрів випадкового «шуму», накладеного на дані спостережень, а також оцінки параметрів можливої варіації невідомих параметрів. Також розглянуто питання локалізації та оцінки амплітуди одичного «викиду» в блоці даних задачі. Насамкінець проаналізовано вплив величини «шуму», накладеного на дані, на якість отриманого розв'язку оберненої задачі; розглянуто питання обчислення параметрів оптимальної «регуляризації» (тобто величин, що характеризують апріорний розподіл невідомих параметрів задачі).

Запропонований підхід до розв'язання обернених задач для шаруватих пакетів може бути використано для створення обладнання нового покоління, призначеного для неруйнівного контролю та оцінки стану дорожнього покриття, злітно-посадкової смуги і фундаментів штучних споруд. Може бути розроблено відповідне програмне забезпечення для таких високошвидкісних сканувальних пристроїв, які дають змогу оперативно відображати діагностовані параметри шаруватої основи.

#### **3.1. Проблематика моніторингу стану елементів конструкцій транспортних комунікацій**

Питання неруйнівного моніторингу і контролю механічних та геометричних параметрів дорожніх покриттів є одними з найважливіших у практиці експлуатації мережі автомобільних доріг, злітно-посадкових смуг ае-

родромів та інших подібних елементів транспортної інфраструктури. Основні вихідні дані, що поставляються сучасними приладами для розрахунку таких параметрів:

- механічні переміщення точок поверхні випробуваного покриття під дією заданого навантаження (наприклад, коліс автомобіля);
- величини відбитих шарам покриття випромінювань, що проникають, створюваних відповідними джерелами.

Головними характеристиками якості для таких вимірювальних інструментів є точність, можливість оцінки якомога більшої кількості параметрів тестованого покриття, висока швидкість отримання відповідних даних.

Прилади першого типу, що дають змогу оцінити ступінь деформації випробуваної поверхні, називаються дефлектометрами. До приладів другого типу належать насамперед георадари.

Сучасні дефлектометри поділяються на два класи [1]. Прилади першого класу дають змогу оцінювати переміщення точок випробуваної поверхні. Їх можна умовно назвати «дефлектометрами переміщення». Такі інструменти використовують, як правило, оптичні датчики-далекоміри [2], закріплені на днищі кузова спеціального транспортного засобу, що створює необхідне навантаження досліджуваного покриття (рис. 3.1).

Зрозуміло, такі інструменти мають бути оснащені також датчиком-інтегратором швидкості транспортного засобу для точного визначення проміжків часу між фіксацією результатів двох сусідніх датчиків переміщення в одній і тій же точці досліджуваної поверхні. Виняток становлять «дефлектометри ваги, що падає» (Falling Weight Deflectometer, FWD), які визначають час прибуття хвилі збурення і розмах відповідних коливань точки поверхні досліджуваного покриття, викликаних падінням з певної висоти масивної металевої плити [3]. Для визначення зазначених параметрів коливань використовують сейсмометри і геофони.

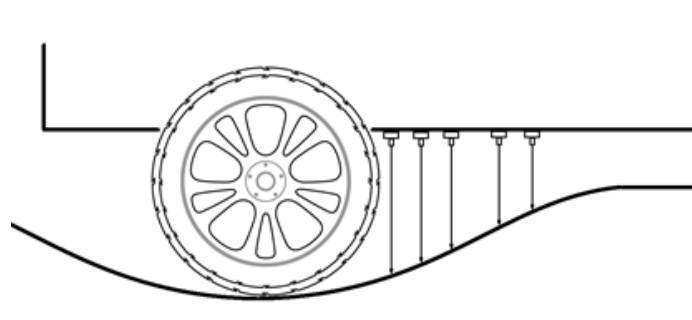


Рис. 3.1. Схема розташування сканувальних датчиків у сучасних високошвидкісних дефлектометрах

Дефлектометри другого типу, так звані «дефлектометри швидкості» [4], використовують оптичні доплерівські датчики для визначення швидкостей певних точок досліджуваної поверхні, які й слугують вихідними даними для розрахунку параметрів дорожнього покриття.

Однією з основних технічних проблем, що виникають під час розробки динамічних (з високою швидкістю транспортного засобу) дефлектометрів обох типів, є вібрація основи кріплення оптичних датчиків, амплітуда якої може значно (іноді на кілька порядків) перевищувати величини вимірюваних переміщень. Частково ця проблема розв'язується встановленням демпфуючих пристроїв, а також акселерометрів-інтеграторів, що враховують вертикальні й горизонтальні рухи основи датчиків. У загальному випадку параметри таких рухів мають бути включені в число невідомих, які підлягають обчисленню в процесі обробки даних вимірювань.

Георадари, як правило, не приносять користі для безпосереднього визначення механічних параметрів досліджуваного покриття, але можуть використовуватися для отримання геометричних характеристик багат шарової основи, що утворює таке покриття (наприклад, форми кордонів розділу шарів), а також деяких фізичних характеристик (наприклад, вмісту вологи), які прямо або опосередковано можуть впливати на міцність конструкції, що розглядається.

На сучасному етапі розвитку тестувальних пристроїв динамічні дефлектометри розглянутих типів оснащені одиничними сканувальними датчиками [1], чого явно недостатньо для отримання більш-менш детальної інформації про параметри випробовуваної багат шарової основи. Як правило, використання таких пристроїв полягає у визначенні за результатами вимірювань за допомогою деяких емпіричних формул певного інтегрального показника (наприклад, SNP, Adjusted Structural Number [5]), що характеризує залишкову міцність випробовуваної конструкції. Для детальнішої оцінки параметрів покриття використовуються дослідження на основі FWD-інструментів, які, проте, мають низьку продуктивність.

Водночас існує розвиток апаратних засобів вимірювань, а також прогрес у розвитку ефективних методів обробки даних, що передбачає використання більшої кількості вихідних даних (причому даних як датчиків дефлектометра, так і георадара та інших пристроїв), що, очевидно, уможливить оцінювання більшої кількості параметрів шаруватої основи, можливо, з більшою точністю. Це дасть змогу створювати високошвидкісні інструменти моніторингу дорожніх покриттів нового покоління з онлайн-інтерпретацією результатів сканування.

Зробимо огляд літератури з питань розв'язання обернених задач для багат шарових основ. Більшість праць присвячено визначенню пружних модулів шарів основи [6, 7], а також пружного модуля реакції ґрунтової основи [8]. Рідше трапляються праці, присвячені визначенню змінних товщин шарів основи і коефіцієнта Пуассона матеріалу шарів [9]. Практично немає досліджень, в яких розглядаються важливі питання визначення параметрів нелінійності матеріалу шарів, а також параметрів взаємодії шарів між собою і з пружною основою.

Як фізичні моделі для розв'язання «прямої задачі» найчастіше розглядають моделі однорідних пружних ізотропних шарів однакової товщини і

навіть моделі однорідного пружного напівпростору з «наведеними» товщинами шарів [3]. Хоча використання таких моделей базується на відомих аналітичних розв'язках (зокрема, на розв'язку Бусінеска для однорідного напівпростору), вони все ж мають відомі обмеження, що унеможливають розгляд, зокрема, неоднорідних середовищ, шарів змінної товщини тощо. Моделі, які ґрунтуються на використанні скінченно-елементних розв'язків, застосовуються дещо рідше [10].

Багато сучасних праць пов'язано з використанням новітніх інструментів апроксимації функцій (так званих «сурогатних», або емпіричних моделей) багатьох змінних, у тому числі нейронних мереж [11–13]. Такі моделі дають змогу здійснювати оперативний аналіз отриманих дефлектометричних даних, однак для реалізації процедур «навчання з учителем» вони потребують ефективних методів розв'язку обернених задач для багат шарових основ з різноманітними параметрами шарів на основі «змістовних» моделей.

Таким чином, у цілому наявний матеріал щодо розв'язання «обернених задач» для шаруватих основ має розрізнений характер; немає загального підходу до розв'язання таких задач, сформульованих на основі широкого класу механічних моделей, що дає змогу перевіряти обґрунтованість апріорних даних про параметри шаруватої основи й точності вимірювальної апаратури, виключати аномальні значення спостережуваних даних («викиди»), а також тестувати модель для уникнення її надмірної параметризації («перенавчання»).

Мета даної роботи – спроба розвитку зазначених методів на базі інформаційно-ймовірнісного («байєсівського») підходу [14], який показав свою ефективність у розв'язанні широкого кола задач математичної фізики (автору відома лише одна праця, присвячена застосуванню цього підходу до розв'язання обернених задач для шаруватих основ [15], а в більшості досліджень використовується традиційний детерміністський («тихоновський») підхід).

У п. 2 розглянуто моделі шаруватих основ, найчастіше використовуваних у задачах неруйнівної діагностики. Множина описуваних параметрів таких моделей природним чином може бути згрупована в блоки, для яких правдоподібно видаються гіпотези про їх (імовірнісну) незалежність. У третьому пункті розглянуто основні принципи побудови ефективних методів розв'язання «прямої задачі» – визначення переміщень точок поверхні багат шарового пружного (пружно-пластичного) пакета, що перебуває під дією певного навантаження. Досліджено способи побудови сіткової задачі, а також методи налаштування багатосіткового ітераційного методу [16, 17] для багат шарових пакетів з криволінійними границями, який дає змогу досягнути точності наближеного розв'язку «на рівні похибки апроксимації» за кількість обчислюваних операцій, що пропорційна кількості сіткових невідомих задачі.

У четвертому пункті розглядаються основні положення і співвідношення байєсівського (інформаційно-ймовірнісного) підходу до розв'язання обернених задач, а також окремі випадки розподілів імовірностей, важливі для застосування пропонованого підходу. В п. 5 викладено основні принципи блочно-параметричного підходу до формування інформаційно-ймовірнісних моделей обернених задач, що є основною метою даного розділу [18]. У шостому пункті сформульовано загальний алгоритм для аналізу обернених задач на основі блочно-параметричного підходу. В сьомому пункті продемонстровано можливості запропонованого підходу для аналізу двошарового пружного пакета: невідомими є геометричні параметри границі розділу шарів такого пакета [19].

### 3.2. Моделі багатошарових основ

Обробка даних, що поставляються розглянутими інструментами, ґрунтується на певних моделях шаруватих основ, розглянутих далі.

Параметри, що розглядаються у процесі моделювання шаруватих основ, поділяються на такі основні групи (рис. 3.2).

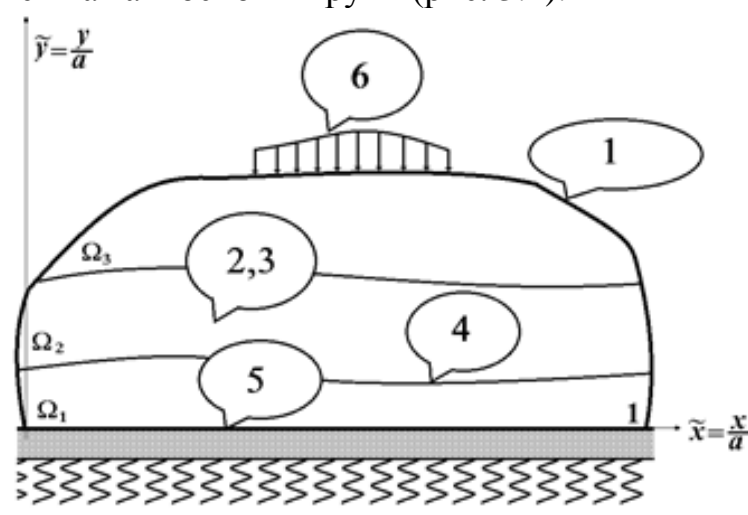


Рис. 3.2. Схема шаруватого пакета

1. Геометричні характеристики шаруватого пакета. Ці параметри характеризують кількість і товщини шарів, а також рівняння границь розділу шарів і верхньої вільної поверхні, що визначаються зазвичай за допомогою сплайнів або інших апроксимуючих функцій.

2. Механічні властивості шарів пакета. Це насамперед пружні константи (наприклад, модуль зсуву  $G$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu$  у випадку ізотропного середовища), параметри, що характеризують пластичні, в'язко-пружні та інші властивості матеріалу шару, а також ступінь розвитку втомних руйнувань.

3. Інші фізичні параметри матеріалу шарів, такі як ступінь ущільнення, вміст вологи, пористість, в'язкість і т. д.



4. Параметри інтерфейсу між шарами. Тип взаємодії (жорстке зчеплення або можливість проковзання шарів, наприклад, відповідно до закону Амонтона–Кулона тощо) і його параметри.

5. Характеристики ґрунтової основи, на якій розташовано розглянутий пакет. На рис. 3.2 зображено модель основи Пастернака, що характеризується двома параметрами: модулем зсуву  $G_s$  і коефіцієнтом жорсткості «пружини»  $k$ , хоча можуть бути використані моделі з меншою (основа Вінклера) або великою (основа Керра) кількістю параметрів [20].

6. Параметри розподіленого навантаження, під дією якого перебуває шаруватий пакет у процесі випробувань. Характеризують сплайн чи іншу наближувальну функцію  $q$ .

Модель шаруватої основи як системи з розподіленими параметрами ( $m$  – вектор параметрів), сформульована в переміщеннях, може бути виражена операторним рівнянням

$$A[m](u) = f[m]. \quad (3.1)$$

Тут  $u = u(x)$  – вектор-функція переміщень точок пакета в області  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_K$  ( $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, K}$  – область, що займається  $i$ -м шаром пакета),  $f[m]$  – вектор об’ємних сил,  $A[m](\cdot): H_1[m] \rightarrow H_2$  – векторний оператор, компоненти якого (як зазвичай прийнято у тензорному аналізі, йдеться про суму за індексами, що повторюються) визначаються за формулою:

$$A_i[m](u) = \frac{\partial \sigma_{ij}[m](\varepsilon_{kl}(u))}{\partial x_j}, \quad i, j, k = \overline{1, 3}. \quad (3.2)$$

Компоненти тензора напружень  $\sigma$  і малих деформацій  $\varepsilon$  пов’язані системою визначних співвідношень:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}[m](\varepsilon_{kl}). \quad (3.3)$$

Зі свого боку, компоненти тензора малих деформацій виражаються через компоненти вектора переміщення  $u$  за формулами Коші–Гріна:

$$\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (3.4)$$

Структура простору  $H_1[m]$  векторів переміщень  $u = u(x)$  визначається системою обмежень:

– крайових умов:

$$\sigma_n(x) = T(x) = (T_1(x), T_2(x), T_3(x))^T; \quad x \in S_\sigma, \quad (3.5.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad S = \partial\Omega = S_\sigma \cup S_u, \quad (3.5.2)$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні пакета;  $\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j$  – координати нормальної компоненти вектора напружень);

– умов взаємодії між шарами пакета і нижнього шару пакета з ґрунтовою основою.

У разі жорстко зчеплених («склеєних») шарів  $i$  і  $k$  на поверхні їх контакту  $S_{ik} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_k$ :

$$\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_{ik}. \quad (3.6)$$

Модель Вінклера взаємодії пакета з ґрунтовою основою описується співвідношеннями (тертям між  $K$ -м шаром пакета і ґрунтовою основою нехтуємо):

$$\begin{cases} \sigma_n^{(K)}(\mathbf{x}) = k_s(\mathbf{x})u_n^{(K)}(\mathbf{x}), \\ \sigma_\tau^{(K)}(\mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in S_K, \quad (3.7)$$

де  $S_K$  – поверхня контакту  $K$ -го шару пакета і ґрунтової основи;  $k_s(\mathbf{x})$  – коефіцієнт локальної жорсткості основи.

У разі моделі основи Пастернака замість першого співвідношення (3.7) матимемо:

$$\sigma_n^{(K)}(\mathbf{x}) = k_s(\mathbf{x})u_n^{(K)}(\mathbf{x}) + G_s(\mathbf{x})\nabla_\zeta^2 u_n^{(K)}, \quad \mathbf{x} \in S_K, \quad (3.8)$$

де  $G_s(\mathbf{x})$  – локальний модуль зсуву основи;  $\xi: (\xi_1, \xi_2)$  – криволінійні (локальні) координати, що визначаються на поверхні контакту  $S_K$ ;

$\nabla_\zeta^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$  – оператор Лапласа в цих координатах.

У розглянутих випадках формулювань моделей шаруватої основи до складу вектора параметрів  $\mathbf{m}$  входять дискретизовані «версії» функцій, що характеризують диференційний оператор (3.2) і вектор правих частин  $\mathbf{f}$  рівняння (1) (наприклад, пружні характеристики  $G$  і  $\nu$  шарів пакета, а також величини, що характеризують їхні пластичні та реологічні властивості), розрахункову область  $\Omega$  (наприклад, рівняння границь розділу шарів  $S_{ik}$  і границі розділу  $S_K$  пакета і ґрунтової основи), систему обмежень, що визначають структуру функціонального простору  $H_1$  (вектор поверхневого навантаження  $T$ ; коефіцієнти тертя між шарами  $\mu_{ik}$ ; характеристики ґрунтової основи  $k_s$  і  $G_s$ ).

Рівняння (3.1) характеризує так звану «пряму задачу»: за заданим вектором параметрів  $m$  визначити вектор переміщень  $u$ :

$$u = \mathfrak{R}(m),$$

де  $\mathfrak{R}(\cdot): H_M \rightarrow H_1[m]$  – оператор «прямої задачі»;  $H_M$  – множина зміни вектора параметрів  $m$ .

Для формулювання «оберненої задачі» вводять у розгляд оператор  $\mathfrak{S}(\cdot): H_1[m] \rightarrow H_D$ , який для кожного  $u$  визначає так званий «вектор модельних даних»  $d = (d_1, d_2, \dots)^T$  задачі:

$$d = \mathfrak{S}(u(m)) = g(m), \quad (3.9)$$

де  $H_D$  – простір векторів модельних даних;  $g(\cdot): H_M \rightarrow H_D$ .

Як модельні дані насамперед слід розглядати радіальні переміщення  $u_i$  певних точок поверхні пакета  $A_i$ , що скануються кожним використаним дефлектометром (рис. 3.1):

$$d_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij} u_{ij}, \quad d_i = \left( \sum_{j=1}^3 l_{ij} v_{ij} \right), \quad i = 1, 2, \dots, K_d,$$

де  $l_{ij}$ ,  $j=1, 2, 3$  – направляючі косинуси сканувального променя  $i$ -го дефлектометра;  $K_d$  – загальна кількість використаних дефлектометрів. Іншим прикладом модельних даних може слугувати вимірюна далекоміром відстань від місця його розміщення до точки вільної поверхні пакета, що визначає по суті рівняння частини границі  $\partial \Omega_K$ .

### 3.3. Багатосіткові ітераційні алгоритми розв'язання крайових задач для пружних та пружно-пластичних багатошарових пакетів з криволінійними границями

Як було зазначено в попередньому пункті, основні класи обернених задач для пружних та пружно-пластичних шаруватих пакетів пов'язані в основному з визначенням пружних та пружно-пластичних параметрів шарів пакета, а також конфігурації самих шарів. Для дослідження розв'язків таких задач застосовуються переважно градієнтні методи з метою мінімізації певного нев'язочного функціонала, а також методи статистичного моделювання (Монте-Карло) для дослідження поведінки цього функціонала поблизу екстремальних точок. Під час використання будь-якого з цих методів ключовим питанням є ефективний розв'язок «прямої задачі» для пакета, що має задані характеристики досліджуваних параметрів.

Нині одним з найбільш ефективних методів розв'язання еліптичних крайових задач є багатосітковий метод [21], уперше запропонований у 1960-х рр. та активно розроблюваний наприкінці ХХ – на початку ХХІ ст. Проте ефективність методу суттєво залежить від якісного його «налаштування» залежно від особливостей вихідної диференціальної задачі, а також топології сітки, що використовується для дискретизації цієї задачі [22]. До параметрів такого налаштування входять, зокрема: тип релаксаційної схеми, операторів інтерполяції та проектування з одного сіткового простору в інший; спосіб дискретизації диференціальної задачі на грубих сітках; кількість застосовуваних пре- і постітерацій релаксаційного оператора тощо.

Як відомо, основою сучасних багатосіткових методів є два алгоритми: алгоритм корекції наближеного розв'язку засобами грубих сіток (Coarse Grid Correction Cycle, CGC-алгоритм) і повний багатосітковий алгоритм (Full Multigrid Cycle, FMG-алгоритм). Завданням першого алгоритму є зменшення норми похибки наближеного розв'язку на даному сітковому рівні з використанням наближених розв'язків певних сіткових задач, визначених на просторах сіток меншої розмірності. «Налаштування» CGC-алгоритму становить основну частину роботи з конструювання багатосіткового алгоритму і його пристосування до розв'язання даної диференціальної задачі. Аби виконати завдання такого налаштування алгоритму, на межі ХХ–ХХІ ст. було розроблено досить потужні теоретичні інструменти, зокрема локальний аналіз Фур'є [23]. Однак у деяких працях зазначені певні обмеження, що унеможливають повною мірою використати його переваги для певних диференціальних операторів та практично важливих випадків дискретизації [24]. У таких випадках доцільна безпосередня перевірка параметрів ефективності алгоритму на певних модельних задачах.

Завданням повного багатосіткового алгоритму (FMG-алгоритму) є отримання наближеного розв'язку сіткової задачі на «найвищому» рівні дискретизації (на найдрібнішій сітці) «на рівні похибки апроксимації», коли похибка наближеного розв'язку сіткових рівнянь приблизно дорівнює (у певній нормі) похибці дискретизації вихідної диференційної задачі. Розв'язання задачі починається на «нульовому рівні» (на найгрубішій сітці), і на кожному наступному рівні після відповідної корекції наближений розв'язок інтерполюється на дрібнішу сітку. Таким чином, налаштування FMG-алгоритму полягає у виборі типу оператора інтерполювання та кількості кроків CGC-алгоритму на кожному сітковому рівні, що використовується для уточнення наближеного розв'язку на цьому рівні.

Мета цього пункту – дослідження ефективності CGC- та FMG-алгоритмів для розв'язання крайової задачі плоскої деформації пружного (пружно-пластичного) пакета.

Розглянемо задачу плоскої деформації пружного (пружно-пластичного) шаруватого пакета, навантаженого на його верхній поверхні (рис. 3.3). Шари пакета передбачаються жорстко зчепленими (склеєними); умови взаємодії пакета з основою, на якій він розташований, сформульовано у попередньому пункті.

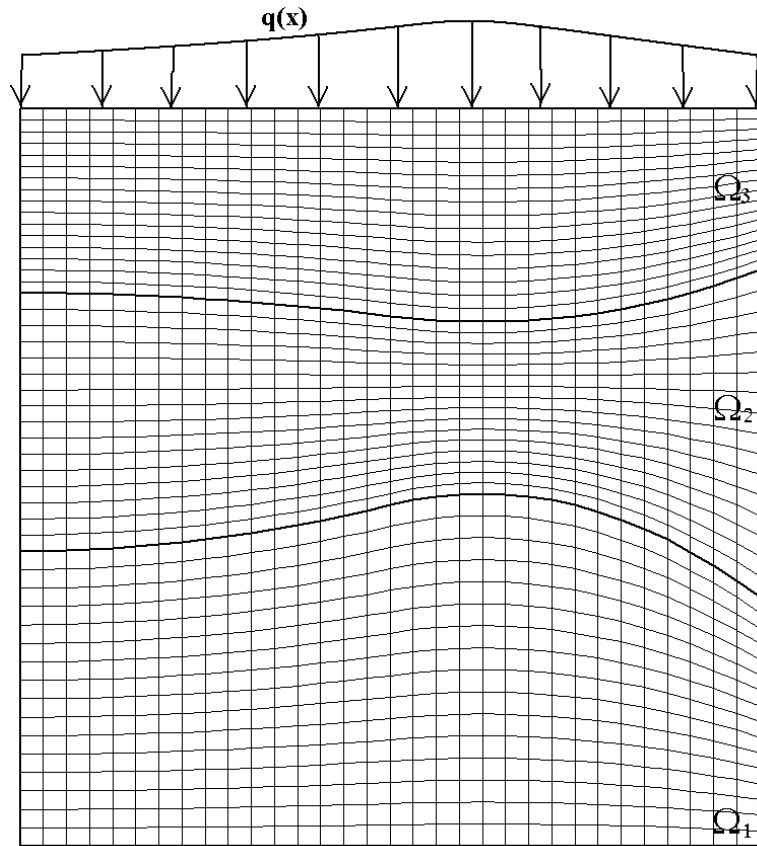


Рис. 3.3. Багатошаровий пакет із криволінійними границями між шарами з побудованою регулярною сіткою

Диференційна статична задача розрахунку пакета полягає у визначенні вектор-функції  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^T$  двовимірних координат  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , що задовольняє в області  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_m$  ( $m$  – кількість шарів пакета) співвідношення (3.1) і крайові умови (3.5) – (3.8).

У разі лінійно-ізотропних пружних пакетів пружні параметри  $G$ ,  $\nu$  розглядаються як кусково-неперервні функції в області  $\Omega$  (неперервні в кожній області  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ); у разі пружно-пластичної деформації в рамках моделі Генкі–Надаї–Іллюшина [25] модуль зсуву  $G$  у кожному шарі пакета визначається як функція переміщення  $u$  співвідношенням (як зазвичай у тензорному аналізі, використовується підсумовування за індексами, що повторюються, від 1 до 2):

$$G = G(\mathbf{u}) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i(\mathbf{u}))}{\varepsilon_i(\mathbf{u})}, \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_i(\mathbf{u}) = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) - \frac{1}{3} \theta(\mathbf{u}) \delta_{ij},$$

де  $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$  – задана функція залежності інтенсивності напружень від інтенсивності деформацій (своя для кожного шару),  $e_{ij}$  – компоненти девіатора деформацій.

Для переходу від диференціальної задачі (3.1), (3.5) до сіткової використовуємо так зване «слабке» формулювання: знайти вектор-функцію  $u(x) \in H_u$ , що задовольняє співвідношення:

$$A(u, v) = f(v) \quad \forall v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T \in H_0. \quad (3.11)$$

Тут:

$$A(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \quad (3.12)$$

– білінійна (у разі лінійно-пружного пакета) або лінійна лише за другим аргументом (у разі пружно-пластичної деформації) неперервна форма від двох аргументів  $u$  і  $v$ :

$$f(v) = \int_{\Omega} F_i v_i dx + \int_{S_{\sigma}} T_i v_i ds \quad (3.13)$$

– лінійний неперервний функціонал від  $v$ ,  $H_u$  – простір функцій  $u(x)$ , що задовольняють умову (3.5.2) на множині  $S_u$ ,  $H_0$  – простір функцій  $v(x)$ , що дорівнюють нулю на цій же множині.

Як відомо, регулярними називаються сітки певної порівняно простої структури, побудовані в так званій *розрахунковій області*  $\Xi \in \mathbb{R}^2$ , які потім відображаються у *фізичній області*  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  за допомогою певного відображення:

$$x = x(\xi), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Xi. \quad (3.14)$$

Задача (3.11) при цьому розв'язується у розрахунковій області  $\Xi$  на рівномірній прямокутній сітці, а відображення (3.14) формує у фізичній області  $\Omega$  відповідні криволінійні *лінії сітки* (рис. 3.3).

Задача (3.11) в узагальнених координатах  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  запишеться у вигляді:

$$\tilde{A}(u, v) = \tilde{f}(v), \quad u(\xi) \in H_{u\xi}, \quad \forall v(\xi) = (v_1(\xi), v_2(\xi))^T \in H_{0\xi}. \quad (3.15)$$

Тут  $H_{u\xi}$  – простір функцій, що задовольняють другу умову (3.5) на тій підмножині  $S_{u\xi}$  границі розрахункової області  $\Xi$ , яка через (3.14) відображається в  $S_u$ ,  $H_{0\xi}$  – простір функцій, тотожно рівних нулю на цій підмножині. Вирази (3.12) і (3.13) для форми та функціонала задачі (3.11) у криволінійних координатах  $\xi$  запишуться у вигляді:

$$\tilde{A}(u, v) = \int_{\Xi} \sigma_{ij}(u(\xi)) \sqrt{g^{\xi}} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} d\xi, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}(v) = \int_{\Xi} \sqrt{g^{\xi}} F_{iv} d\xi + \int_{S_{\alpha\xi}} \sqrt{g^{\xi}} T_{iv} ds_{\xi}. \quad (3.17)$$

Квадрат якобіана  $J = \sqrt{g^{\xi}}$  відображення (3.14) виражається через коваріантні компоненти метричного тензора  $g_{ij}^{\xi} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}$  як  $g^{\xi} = \det(g_{ij}^{\xi})$  ( $i, j = 1, 2$ ).

Компоненти тензора малих деформацій у криволінійних координатах  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  мають вигляд:

$$\varepsilon_{ij}(u(\xi)) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right). \quad (3.18)$$

Похідні від компонент відображення  $\xi = \xi(x)$ , що є оберненим до відображення (3.14), які фігурують у формулах (3.16), (3.17), виражаються у такий спосіб:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{g^{\xi}}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\sqrt{g^{\xi}}} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\sqrt{g^{\xi}}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{g^{\xi}}} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}. \quad (3.19)$$

Дискретизація за методом Бубнова–Гальоркіна задачі (3.15) проводиться стандартним чином на базі просторів пробних та перевірних функцій на рівномірній прямокутній сітці  $\Xi_h \subset \Xi$ , що характеризується векторним параметром  $h = (h_1, h_2)$ , де  $h_i$  – величина кроку сітки вздовж координати  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$ . У результаті дискретизації отримуємо сіткову задачу: визначити невідому сіткову функцію  $u^h \in \Xi_h$ , яка задовольняє систему рівнянь:

$$\tilde{A}^h u^h = \tilde{F}^h, \quad (3.20)$$

де  $\tilde{A}^h$  – дискретизована «версія» диференційного оператора, що відповідає формі (3.16),  $\tilde{F}^h$  – вектор правих частин системи (дискретизований функціонал (3.17)). У разі лінійно-пружного пакета співвідношення (3.20) є системою лінійних рівнянь; у разі пружнопластичної деформації система (3.20) нелінійна, і розглянутий нижче багатосітковий метод використовується для розв'язання відповідної лінеаризованої «версії» співвідношень (3.20). Аналіз параметрів багатосіткового методу проводиться аналогічно лінійно-пружному випадку з використанням принципу «заморожених коефіцієнтів».

Розглянемо задачу визначення відображення (3.14) розрахункової області  $\Xi$  у фізичну  $\Omega$ . Успішне розв'язання цієї задачі багато в чому визначає якість і точність наближеного розв'язку вихідної диференційної задачі (3.1). У зв'язку з цим до відображення (3.14) поставимо такі дві вимоги: 1) межі розділу шарів пакета мають збігатися з відповідними лініями сітки; 2) лінії сітки мають приблизно рівномірно заповнювати простір кожного шару  $\Omega_i$  пакета. Нині відомі дві основні методики побудови регулярних сі-

ток: методики, що базуються на інтерполяційних формулах, та методики на базі певних диференційних моделей [26]. У праці [27] проаналізовано обидва підходи до побудови сіток для шарів пакета. Оскільки за своєю топологією шари близькі до прямокутників (у певному «гомеоморфному» сенсі), то інтерполяційні формули для побудови сіток дають досить непоганий результат.

Вважатимемо, що кожен із шарів  $\Omega_i$  двовимірного пакета обмежений зліва і справа прямими  $x_1 = 0$  і  $x_1 = L$ , а знизу і зверху кривими  $x_2 = S_{i-1}(x_1)$  і  $x_2 = S_i(x_1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Розрахункову область  $\Xi = \Xi_1 \cup \Xi_2 \cup \dots \cup \Xi_m$  вважатимемо прямокутником  $(0, m) \times (0, 1)$ , що складається з одиничних квадратів  $\Xi_i = (i - 1, i) \times (0, 1)$ , причому відображення (3.14) для кожної підобласті  $\Xi_i \rightarrow \Omega_i$  задається формулами:

$$\begin{cases} x_1 = L \xi_1, \\ x_2 = S_{i-1}(\xi_1) + \xi_2(S_i(x_1) - S_{i-1}(x_1)), \end{cases} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Xi_i. \quad (3.21)$$

Зразок сітки, побудованої для тришарового пакета за цією методикою, зображено рис. 3.3.

Для застосування багатосіткового методу систему рівнянь (3.20) формують не на одному, а відразу на кількох сіткових рівнях, що становлять певну ієрархію з параметрами дискретизації  $h_0, h_1, \dots, h_K$ . Індекс «0» відповідає найгрубішій сітці  $\Xi_{h_0}$ ; сітка на кожному наступному рівні  $\Xi_{h_i}$  утворюється певним дробленням сітки попереднього ієрархічного рівня  $\Xi_{h_{i-1}}$ . Найвищий рівень сіткової ієрархії з індексом  $K$  відповідає найдрібнішій сітці  $\Xi_{h_K}$ . Відповідно до цієї ієрархії рівнів будується послідовність сіткових задач:

$$\tilde{A}^{hi} u^{hi} = \tilde{F}^{hi}, \quad i = 0, 1, \dots, K, \quad (3.22)$$

або, коротше,  $A_k u_k = F_k$ , що апроксимують вихідну диференційну задачу (3.1), (3.5).

Розглянемо тепер завдання налаштування багатосіткового алгоритму розв'язання задачі (3.1), (3.5) на послідовності сіток. Як зазначалося, CGC-алгоритм служить для зменшення норми похибки наближеного розв'язку системи лінійних рівнянь (3.22) на сітковому рівні  $k$ . Послідовність його налаштування розпадається на два етапи.

1. Вибір основних сіткових операторів, що використовуються в алгоритмі. Це насамперед оператор релаксаційної схеми  $S_k$ , оператор проєкування сіткової функції з дрібної сітки (рівень  $k$ ) на грубішу (рівень  $k-1$ )  $R_k^{k-1}$ , спосіб формування матриці системи  $A_{k-1}$  рівнянь на сітковому рівні  $k-1$ , оператор інтерполяції  $P_{k-1}^k$  з грубої сітки на дрібнішу. Як правило, для більшості задач вибір останніх трьох операторів має стандартний характер і визначається в основному способом подрібнення сітки під час переходу до вищого сіткового рівня (ізотропне та анізотропне подрібнення; в даній



праці обмежимося випадком ізотропного подрібнення, Standard Coarsening) [23]. Тому зосередимо основну увагу на виборі релаксаційного оператора.

2. Визначення трійки параметрів  $(v_1, v_2, \gamma)$ , де  $v_1, v_2$  – число згладжувальних пре- та постітерацій релаксаційної схеми  $S_k$  (значення цих параметрів зазвичай передбачаються однаковими на всіх рівнях),  $\gamma$  – кількість рекурсивно застосовуваних ітерацій CGC-алгоритму на сітковому рівні  $k-1$  для уточнення поправки до наближеного розв'язку на рівні  $k$ . У більшості випадків вибір робиться між значеннями  $\gamma = 1$  (V-цикл) та  $\gamma = 2$  (W-цикл) цього параметра.

CGC-алгоритм формулюється рекурсивно в такий спосіб.

<p><b>Алгоритм 3.1. CGC_CYCLE</b>(<math>k, F_k, u_k^{(0)}, v_1, v_2, \gamma</math>)</p> <p>/* Алгоритм наближеного розв'язання системи лінійних рівнянь <math>A_k u_k = F_k</math>, де <math>k</math> – рівень сітки <math>\Xi_{hk}</math>, <math>u_k^{(0)}</math> – початкове наближення, <math>A_k = \tilde{A}^{hk}</math> – матриця системи, <math>F_k</math> – вектор правих частин, <math>v_1</math> – кількість преітерацій релаксаційної схеми, <math>v_2</math> – кількість постітерацій, <math>\gamma</math> – параметр циклу.</p> <p>Алгоритм повертає значення <math>u_k^{(1)}</math> – уточнений наближений розв'язок на сітковому рівні <math>k</math>. */</p> <p><b>Begin</b></p> <p>1. Якщо <math>k = 0</math>, система (22) розв'язується за допомогою прямого методу. В результаті розв'язання отримується величина <math>u_k^{(1)}</math>. Перейти до пункту 9.</p> <p>2. (Пре-релаксація). Провести <math>v_1</math> згладжувальних ітерацій за формулою:</p> $\tilde{u}_k^{(0)} \leftarrow S_k^{v_1} u_k^{(0)},$ <p>де <math>S_k</math> – оператор релаксаційної схеми.</p> <p>3. Обчислення нев'язки за формулою:</p> $r^k \leftarrow A_k \tilde{u}_k^{(0)} - F_k.$ <p>4. Проектування нев'язки на грубу сітку (рівня, на одиницю меншого):</p> $r^{k-1} \leftarrow R_k^{k-1} r^k,$ <p>де <math>R_k^{k-1}</math> – оператор проектування з дрібної сітки на грубішу.</p> <p>5. Обчислення та уточнення вектора поправки <math>e^{k-1}</math> на грубій сітці, тобто наближеного розв'язку рівняння:</p> $A_{k-1} e^{k-1} = r^{k-1}, \tag{3.23}$ <p>рекурсивно за допомогою цього ж алгоритму, починаючи з нульового початкового наближення:</p> $\tilde{e}_k^{(0)} \leftarrow 0.$ <p>For <math>i \leftarrow 1</math> to <math>\gamma</math> do <math>\tilde{e}_{k-1}^{(i)} \leftarrow \text{CGC\_CYCLE}(k-1, r^{k-1}, \tilde{e}_{k-1}^{(i-1)}, v_1, v_2, \gamma)</math></p>
--

6. Інтерполяція отриманої поправки  $\tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)}$  на дрібну сітку (рівня, на одиницю вищого):

$$e^k \leftarrow P_{k-1}^k \tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)},$$

де  $P_{k-1}^k$  – оператор інтерполяції з грубої сітки на дрібнішу.

7. Корекція:

$$u_k^{(1)} \leftarrow \tilde{u}_k^{(0)} + e^k.$$

8. (Пострелаксація). Проведення додаткових  $\nu_2$  згладжувальних ітерацій за формулою:

$$u_k^{(1)} \leftarrow S_k^{\nu_2} u_k^{(1)}.$$

9. Повернути результат  $u_k^{(1)}$ .

End

Розглянемо такі можливі релаксаційні схеми (докладний опис у [23]).

1. Точкова релаксація Якобі.
2. Точкова релаксація Гауса–Зейделя (впорядкування невідомих у напрямку «схід–захід», тобто вздовж осі  $\xi_1$ ).
3. Точкова релаксація Гауса–Зейделя (впорядкування невідомих у напрямку «південь–північ», тобто вздовж осі  $\xi_2$ ).
4. «Шахівниця» Якобі (спочатку релаксація «парних» вузлів, а потім «непарних», використовуючи оновлені «парні» значення).
5. «Шахівниця» Гауса–Зейделя «схід–захід».
6. «Шахівниця» Гауса–Зейделя «південь–північ».
7. Релаксація Якобі з одночасним оновленням значень змінних на  $\xi_1$ -лінії ( $\xi_1$ -лінія Якобі).
8. Релаксація Якобі з одночасним оновленням значень змінних на  $\xi_2$ -лінії ( $\xi_2$ -лінія Якобі).
9.  $\xi_1$ -лінія Гауса–Зейделя.
10.  $\xi_2$ -лінія Гауса–Зейделя.
11.  $\xi_1$ -«зебра» (спочатку оновлюються «парні»  $\xi_1$ -лінії, а потім – «непарні»).
12.  $\xi_2$ -«зебра» (аналогічно для  $\xi_2$ -ліній).

Основним фактором, що характеризує ефективність багатосіткового CGC-алгоритму, є множник  $\rho_k$  зменшення норми похибки за одну ітерацію

$$\|u_k^{(1)} - u_k\| \leq \rho_k \|u_k^{(0)} - u_k\|. \quad (3.24)$$

Оцінюватимемо цей фактор як середній за певну пробну кількість ітерацій CGC-алгоритму, починаючи з нульового початкового наближення, для значення трійки параметрів  $(\nu_1, \nu_2, \gamma)$ , рівного  $(1, 0, 1)$ .

Оскільки диференціальна вихідна задача (1) не має фізичної просторової анізотропії, то головний внесок в ефективність того чи іншого релаксаційного оператора роблять властивості відображення (3.14), які, зі свого боку, визначають топологію сітки у фізичній області  $\Omega$ . Зазвичай вважається, якщо комірки криволінійної області мають значення аспектного коефіцієнта  $A = h_x/h_y \cong 1$ , то добре працюють усі схеми послідовної (поточної) релаксації (Якобі, Гауса–Зейделя, «шахівниці»). У разі комірок, витягнутих у ширину або висоту, послідовні релаксаційні схеми перестають працювати, і необхідно застосування блокових релаксацій на  $\xi_1$ - або  $\xi_2$ -лініях. На практиці не дуже просто досягти рівномірного і приблизно рівного одиниці розподілу аспектного коефіцієнта для всієї множини комірок сітки, особливо у випадку більш-менш вираженої варіабельності функцій  $S_i(x_1)$ , що визначають межі шарів пакета (див. значення коефіцієнта  $\rho$  для сітки  $192 \times 192$  у табл. 3.1).

Крім того, з'ясувалося, що релаксаційні схеми на криволінійних  $\xi_1$ -лініях працюють гірше, ніж на прямолінійних  $\xi_2$ -лініях (див. стовпці зі значеннями  $\rho$  для сіток  $192 \times 96$  та  $64 \times 192$  у табл. 3.1). Загальна рекомендація для шаруватих пакетів така: слід обирати значення довжини шару пакета  $L > H$  і встановлювати число розбивок сітки на нульовому рівні таким, щоб забезпечити значення аспектного коефіцієнта більше одиниці для сіток на всіх рівнях ієрархії  $i = 0, 1, \dots, K$ . Як релаксаційну схему необхідно обирати одну з блокових релаксаційних схем на  $\xi_2$ -лініях (у разі розглянутого пакета і сітки  $64 \times 192$  це релаксація  $\xi_2$ -«зебра» з мінімальним значенням параметра  $\rho_6 = 0,4173$  табл. 3.1). Оскільки навантаження на шаруваті пакети передбачається переважно вертикальним, то градієнт пружних (пружно-пластичних) переміщень уздовж координати  $x_2$  буде істотно більшим, ніж у напрямку  $x_1$ , тому акуратний вибір числа розбивок сітки на нульовому рівні не вплине на точність наближеного розв'язку.

У табл. 3.1 подано значення фактора збіжності (множника зменшення евклідової норми похибки для однієї ітерації алгоритму) наближеного розв'язку задачі (3.1) для тришарового пакета (рис. 3.3) під дією однорідної об'ємної сили  $F$ , спрямованої вздовж осі  $x_2$  ( $F \cdot L/G_0 = 1$ , де  $G_0$  – модуль зсуву нижнього шару), за допомогою CGC-алгоритму зі значеннями параметрів  $\gamma=1$  (так званий V-цикл),  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 0$  на сітковому рівні  $k = 6$ . Зірочкою позначено релаксаційні схеми, для яких добиралось оптимальне значення параметра релаксації  $\omega$ ; для інших схем використовувалося значення  $\omega = 1$ .

Множник  $\rho_k$  зменшення норми похибки ( $k = 6$ )

Релаксаційна схема	Сітка		
	192×96	192×192	64×192
Точкова Якобі *	0,9259	0,9558	0,9046
Точкова Гауса–Зейделя «схід–захід»	0,9269	0,9431	0,8847
Точкова Гауса–Зейделя «північ–південь»	0,9273	0,9358	0,8728
«Шахівниця» Якобі	0,9133	0,9332	0,8932
«Шахівниця» Гауса–Зейделя «схід–захід»	0,9182	0,9370	0,8967
«Шахівниця» Гауса–Зейделя «північ–південь»	0,9281	0,9405	0,8991
$\xi_1$ -лінія Якобі *	0,9203	0,9361	0,8886
$\xi_2$ -лінія Якобі *	0,8800	0,8451	0,6133
$\xi_1$ -лінія Гауса–Зейделя	0,9030	0,9246	0,8455
$\xi_2$ -лінія Гауса–Зейделя	0,8505	0,8091	0,4491
$\xi_1$ -«зебра»	0,9013	0,9242	0,8705
$\xi_2$ -«зебра»	0,8740	0,8683	0,4173

У процесі обчислень проводилося 15 ітерацій CGC-алгоритму, починаючи з початкового нульового наближення; значення множника зменшення похибки  $\rho_k$  осереднювалося за останніми п'ятьма ітераціями. Зазначений підхід урахує «найгірший сценарій» збіжності алгоритму. На рис. 3.4 зображено поведінку фактора  $\rho_k$  у процесі ітерацій для релаксаційної схеми 12 ( $\xi_2$ -«зебра») на всіх сіткових рівнях  $k = 1, 2, \dots, K = 6$  (сітка розміром  $64 \times 192$  на рівні 6).

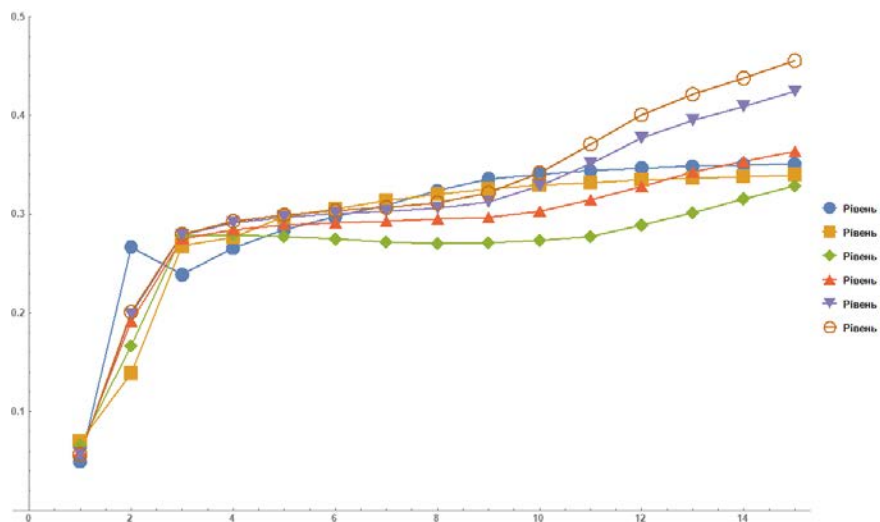


Рис. 3.4. Графік зміни множника зменшення норми похибки у процесі CGC-ітерацій

З рисунка видно, що протягом перших двох-трьох ітерацій фактор  $\rho_k$  швидко зростає та стабілізується на рівні  $\approx 0,3$ , після чого з 8–9-ї ітерації починається його поступове зростання до значень  $\sim 0,4 \div 0,45$ , що особливо виявляється на вищих сіткових рівнях. На практиці зазвичай рідко використовують більше десяти CGC-ітерацій на кожному рівні FMG-алгоритму,

тому як «реалістичний сценарій» у даному випадку можна прийняти «значення стабілізації»  $\rho_k = 0,3$ .

Розглянемо тепер питання обчислення значень трійки параметрів  $(v_1, v_2, \gamma)$  CGC-алгоритму. Обґрунтуванням для вибору таких значень, відмінних від тривіальних  $(1, 0, 1)$ , могло б бути зменшення коефіцієнта  $\rho_k$  за рахунок додаткових згладжувальних процедур як на рівні  $k$ , так і на нижчих сіткових рівнях. Платою за таке можливе зменшення  $\rho_k$  слугує збільшення обчислювальної роботи, що витрачається на виконання зазначених процедур (у разі  $W$ -циклів додається порівняно з  $V$ -циклами ще робота на проектування та інтерполяцію сіткових функцій з рівня на рівень). Як міру ефективності CGC-алгоритму розглянемо показник, що визначає кількість обчислювальної роботи, необхідної для зменшення норми похибки у певну фіксовану кількість разів:

$$P_k^W = -\frac{W}{\ln \rho_k}. \quad (3.25)$$

За одиницю обчислювальної роботи  $W$  взято одну ітерацію релаксаційної схеми на верхньому (для CGC-алгоритму) сітковому рівні  $k$ . Оскільки зі стандартним (ізотропним) укрупненням кількість невідомих на рівні  $k - 1$  буде вчетверо меншою, одна релаксація на цьому рівні становитиме  $1/4$  одиниці, на рівні  $k - 2$  –  $1/16$  одиниці тощо. До складу сумарної роботи  $W$ , що виконується впродовж однієї ітерації CGC-алгоритму, не включаться робота на інтерполяцію, проектування та розв'язання системи (3.22) на нульовому рівні, оскільки ця робота однакова для всіх схем з різними значеннями  $v_1, v_2$  (для  $W$ -циклів, щоправда, ця робота приблизно вдвічі більша, ніж для  $V$ -циклів).

Дані значень  $P_k^W$  з табл. 3.2 не підтверджують тезу про те, що додаткова робота компенсується зменшенням  $\rho_k$  за рахунок додаткового згладжування поправок, і оптимальним є тривіальний вибір  $(1, 0, 1)$  трійки параметрів  $(v_1, v_2, \gamma)$ .

Таблиця 3.2

Параметр питомої роботи  $P_k^W$  (див. (3.25)),  $k = 6$ .

$v_1$	$v_2$	$\gamma$	$P_6^W$
1	0	1	1,3742
1	1	1	1,9809
2	0	1	2,0066
2	1	1	2,5252
2	2	1	2,9734
3	0	1	2,5671
1	0	2	3,2754
1	1	2	5,1327
2	0	2	5,1742
2	1	2	6,9986
2	2	2	8,4331
3	0	2	7,03

Розглянемо тепер повний багатосітковий алгоритм. Він формулюється в такий спосіб.

**Алгоритм 3.2. FMG\_CYCLE**( $v_1, v_2, \gamma, \mu_k$ )

/\* Алгоритм наближеного розв'язання системи лінійних рівнянь  $A_k u_k = F_k$  на найвищому сітковому рівні  $K$ . Параметри  $v_1, v_2, \gamma$  ті ж самі, що й в алгоритмі **CGC\_CYCLE**,  $\mu_k$  – кількість CGC-циклів на сітковому рівні  $k$ . \*/

**Begin**

1. Розв'язати систему (17) прямим методом на сітковому рівні  $k = 0$ . У результаті розв'язання отримаємо величину  $u_0^{(1)}$ .

**For**  $k=1$  **to**  $K$  **do**

**Begin**

2. Інтерполяція отриманого наближеного розв'язку  $u_{k-1}^{(1)}$  на дрібнішу сітку:

$$u_k^{(0)} \leftarrow P_{k-1}^k u_{k-1}^{(1)}. \quad (3.26)$$

3. Уточнення розв'язку на сітковому рівні  $k$ .

$$u_k^{(1)} \leftarrow u_k^{(0)}.$$

**For**  $i \leftarrow 1$  **to**  $\mu_k$  **do**  $u_k^{(i)} \leftarrow \text{CGC\_CYCLE}(k, F_k, u_k^{(i-1)}, v_1, v_2, \gamma)$

**End**

4. Повернути результат  $u_K^{(1)}$ .

**End**

Як зазначалося, завдання FMG-алгоритму – це розв'язання сіткової задачі (3.22) на найвищому сітковому рівні  $k = K$  «на рівні похибки дискретизації». Така похибка на рівні  $k$  у разі використання кусково-лінійних (за кожним з аргументів  $\xi_1, \xi_2$ ), пробних та перевірних функцій (у разі переходу від задачі (3.15) до дискретизованої задачі (3.20) оцінюється як:

$$\varepsilon_k^d = \|u_k - u\| \leq c h_k^2, \quad (3.27)$$

де  $u_k$  – «точний» розв'язок сіткової задачі (3.22),  $u$  – розв'язок вихідної диференційної задачі (3.1),  $h_k$  – характерний розмір сітки, що визначається як певна норма вектора  $h_k$ ,  $c$  – константа, яка залежить від  $h_k$ . Сумарна похибка  $\varepsilon_k^t$  наближеного розв'язку вихідної диференціальної задачі (3.1) оцінюється як сума похибки дискретизації  $\varepsilon_k^d$  та «похибки методу» – похибки  $\varepsilon_k^m$  наближеного розв'язку системи (3.22):

$$\varepsilon_k^t = \|\tilde{u}_k - u\| \leq \varepsilon_k^d + \varepsilon_k^m = \|u_k - u\| + \|\tilde{u}_k - u_k\|, \quad (3.28)$$

де  $\tilde{u}_k = u_k^{(1)}$  – наближений розв'язок системи (3.22), отриманий на етапі 3 багатосіткового FMG-алгоритму на рівні  $k$ . З формули (3.28) випливає, що

під час наближеного розв'язання задачі (3.1) «на рівні похибки дискретизації» не слід сильно зменшувати похибку  $\varepsilon_k^m$  (це призведе до марної обчислювальної роботи); цілком достатньо, щоб:

$$\varepsilon_k^m \cong \varepsilon_k^d \quad (3.29)$$

(у порядку величини). Налаштування FMG-алгоритму, що полягає в раціональному виборі чисел  $\mu_k$  ( $k=1,2,\dots,K$ ) покращувальних ітерацій на етапі 3 цього алгоритму, має виходити із зазначеного міркування. Спробуємо оцінити, у скільки разів потрібно зменшити похибку  $\varepsilon_k^m$  наближеного розв'язку, отриманого на етапі 2 інтерполяцією із сіткового рівня  $k-1$  за формулою (3.26), тобто оцінимо фактор  $\rho_{max}$ :

$$\|u_k^{(1)} - u_k\| \leq \rho_{max} \|u_k^{(0)} - u_k\|, \quad (3.30)$$

для якого виконується співвідношення (3.29) (рис. 3.5).

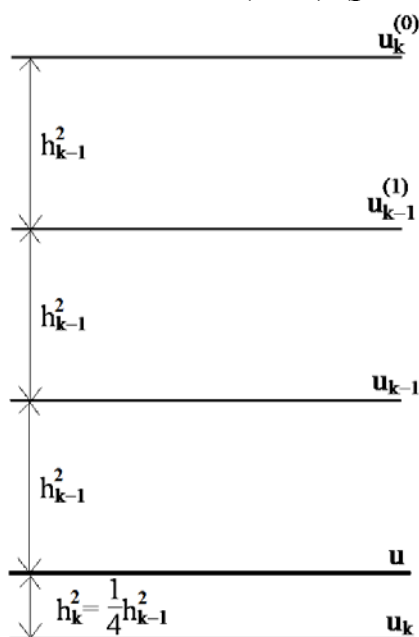


Рис. 3.5. Схема оцінки похибок у процесі застосування FMG-алгоритму

Похибка дискретизації на рівні  $k-1$  має величину порядку  $h_{k-1}^2$  (формула (3.27)), похибка  $\varepsilon_{k-1}^m$  наприкінці етапу 3 за припущенням (3.29) становить таку саму величину; білінійна інтерполяція наближеного розв'язку  $u_{k-1}^{(1)} \rightarrow u_k^{(0)}$  на рівень  $k$  на етапі 2 (формула (3.26)) вносить додаткову похибку також порядку  $\sim h_{k-1}^2$ ; нарешті, «точний» розв'язок  $u_k$  сіткової задачі на рівні  $k$  відрізняється від «точного» розв'язку диференційної задачі  $u$  на вели-

чину  $\sim h_k^2 = 1/4 h_{k-1}^2$  (рис. 3.5). У результаті для досягнення «похибкою методу» на рівні  $k$  величини  $\sim h_k^2$  потрібно норму похибки  $\|u_k^{(0)} - u_k\|$  зменшити у  $\sim 13$  разів, що дає змогу приблизно оцінити величину  $\rho_{\max} \cong \frac{1}{13}$ . Знаючи оцінки для  $\rho_{\max}$  та  $\rho_k$ , можна отримати оцінку для кількості уточнювальних ітерацій  $\mu_k$ :

$$\mu_k = \frac{\ln(\rho_{\max})}{\ln(\rho_k)}. \quad (3.31)$$

Наприклад, для «песимістичної» оцінки для  $\rho_k = 0,4173$  та обраної релаксаційної схеми 12, отримуємо  $\mu_k = 3$ . На практиці дослідження поведінки множника зменшення похибки в процесі CGC-ітерацій на кожному рівні (табл. 3.3) свідчить про близькість цього показника до «реалістичної» оцінки  $\rho_k \cong 0,3$ , зазначеної вище, що дає значення  $\mu_k = 2$ .

Таблиця 3.3

**Множники зменшення похибки CGC-ітерацій  
повного багатосіткового алгоритму,  $\mu_k = 3, k = 1, 2, \dots, 6$**

	Рівень 1			Рівень 2			Рівень 3		
Ітерація	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\rho$	0,3562	0,2601	0,2407	0,3454	0,2534	0,2593	0,2918	0,2585	0,2556
	Рівень 4			Рівень 5			Рівень 6		
Ітерація	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\rho$	0,2828	0,2757	0,2891	0,2832	0,2932	0,3075	0,2842	0,3012	0,3155

Поведінку похибок  $\varepsilon_k^d, \varepsilon_k^m, \varepsilon_k^t$  у процесі роботи FMG-алгоритму для  $\mu_k = 2$  зображено на рис. 3.6.

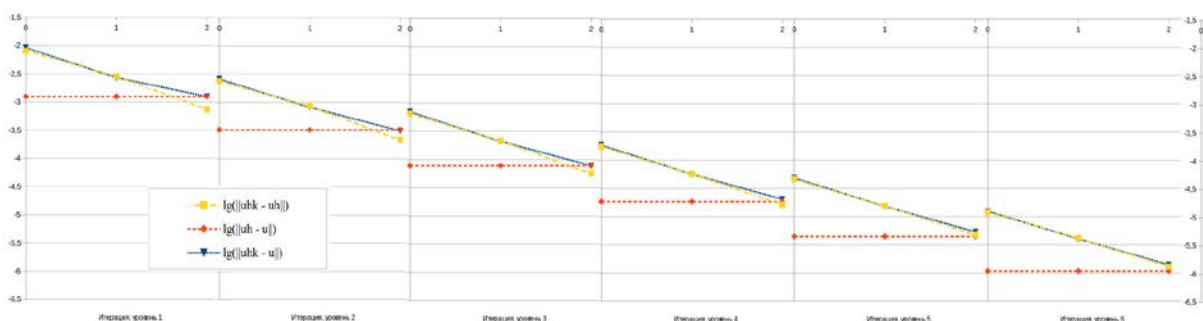


Рис. 3.6. Графік зміни логарифмів похибок  $\varepsilon_k^d, \varepsilon_k^m, \varepsilon_k^t$  у процесі ітерацій FMG-алгоритму



З графіків видно, що таке значення кількості ітерацій  $\mu_k = 2$  на кожному сітковому рівні достатнє, щоб отримати наближений розв'язок задачі (3.1) «на рівні похибки дискретизації» на найвищому сітковому рівні  $K$ . Також помітна деяка «переробка» CGC-ітерацій на нижніх рівнях, що пояснюється «точним» розв'язанням сіткової задачі (3.22) на нульовому рівні, тобто зведенням до нуля на цьому рівні «похибки методу». Це означає, що в принципі на нижніх рівнях значення  $\mu_k$  можна брати дещо меншими. Втім це лише незначно вплине на загальну «вартість» алгоритму, оскільки основна частина обчислювальної роботи виконується на верхніх сіткових рівнях.

Викладена в даному розділі на прикладі крайових задач для пружних (пружно-пластичних) шаруватих пакетів з криволінійними границями методика ефективного налаштування багатосіткових алгоритмів може бути застосована для досить широкого кола задач механіки деформованого твердого тіла. Реалізація цієї методики потребує розробленого програмного інструментарію для реалізації багатосіткових ітераційних алгоритмів. Власне, такий інструментарій і необхідний для розробки сучасних програмних комплексів з розв'язання еліптичних крайових задач. Щоправда, для реалізації методик налаштування потрібно розробити весь «спектр» релаксаційних процедур (у цій праці їх розглянуто 12). Однак розробка таких процедур становить лише малу частину роботи зі створення всього «багатосіткового інструментарію».

#### **3.4. Основи інформаційно-імовірнісного підходу до розв'язання обернених задач**

У класичній обчислювальній математиці широко відомий «принцип коректності Адамара» [28], згідно з яким задачі, побудовані на базі математичних моделей фізичних явищ, повинні мати такі властивості.

1. Розв'язок існує.
2. Розв'язок єдиний.
3. Розв'язок неперервно залежить від початкових даних у певній розумній топології.

Нагадаємо, що «пряма» задача для багатошарових пакетів формулюється у вигляді (3.9): знайти відображення  $g(\cdot): H_M \rightarrow H_D$  множини можливих значень параметрів пакета  $H_M$  у множину модельних даних задачі  $H_D$ , в ролі яких переважно розглядаються переміщення певних точок поверхні верхнього шару пакета. Завдяки еліптичності оператора (3.2) в багатьох випадках «пряма» задача є коректною за Адамаром. Суть оберненої задачі полягає в «обертанні» оператора  $g(\cdot)$ : для даного (можливо, «зашумленого») вектора даних  $d_{obs}$ , що спостерігаємо, знайти відповідне значення вектора параметрів  $m \in H_M$ . Звичайно, ідеальною була б ситуація, коли і для оберненого оператора  $g(\cdot)^{-1}$  виконувались би умови коректності Адамара. В цьому випадку відображення  $g(\cdot)$  було б гомеоморфізмом: взаємно одно-

значним (бієктивним) і взаємно неперервним відображенням  $H_M$  на (все)  $H_D$ . Але складність полягає в тому, що відображення  $g(\cdot)$  з  $H_M$  в  $H_D$  не має бути гомеоморфізмом. Порушення умов гомеоморфності призводить до таких ситуацій, що унеможливають безпосереднє розв'язання оберненої задачі.

1. Оператор  $g(\cdot)$  не є сюр'єкцією, тобто  $g(H_M) \subsetneq H_D$ . Це означає, що для певного вектора  $d_{obs} \in H_D$  відповідний йому вектор  $m \in H_M$  може не існувати.

2. Для певного вектора  $d \in H_D$  можливе існування як мінімум двох векторів  $m_1 \in H_M$ , для яких  $g(m_1) = g(m_2) = d$  (порушення єдиності розв'язку оберненої задачі).

3. Для «зашумленого»  $d_{obs}$  і «точного»  $d_{true}$  вектора даних:

$$d_{obs} = d_{true} + \varepsilon,$$

відповідні розв'язки оберненої задачі можуть сильно відрізнятись навіть для малих значень компонент «шуму»  $\varepsilon$  (порушення неперервної залежності розв'язку оберненої задачі від вихідних даних).

Для подолання зазначених труднощів, пов'язаних з порушенням гомеоморфності відображення  $g(\cdot)$ , були запропоновані два основні підходи. Історично перший з них, що називається детерміністським, походить з 60-х рр. XX ст. [29]. Відповідно до цього підходу, що іноді називається методом регуляризації А. Н. Тихонова, наближене «обернення» оператора (3.11) виконується як розв'язок оптимізаційної задачі мінімізації функціонала:

$$I(m) = R(g(m) - d_{obs}) + \alpha(\varepsilon)\Omega(m) \rightarrow \min, m \in H_M. \quad (3.32)$$

Функціонал  $R(\cdot)$ , що називається «нев'язочним» або «підгоночним», виконує роль проєктора  $H_D \rightarrow g(H_M)$ , долаючи таким чином першу із зазначених складнощів, що пов'язано з існуванням розв'язку оберненої задачі. Для подолання другого і третього ускладнення (порушення єдиності розв'язку оберненої задачі та його неперервної залежності від початкових даних) у співвідношенні (3.32) вводиться другий функціонал  $\Omega(m)$ , що називається «регуляризуючим» або «стабілізуєчим». Цей функціонал має характер штрафного, накладаючи додаткові обмеження на множину можливих значень  $H_M$  вектора параметрів  $m$ . З одного боку, таке звуження множини зміни  $m$  може визначатися певною апріорною інформацією про розв'язок оберненої задачі, що зменшує ймовірність існування декількох мінімумів функціонала  $I(m)$  (так званої «мультимодальності»). З іншого боку, введення другого доданка у виразі (3.32) може допомогти в подоланні порушення взаємної неперервності відображення  $g(\cdot)$ . Справа в тому, що в разі «згладжувального» оператора  $g(\cdot)$  більшою мірою знижуються висо-

кочастотні компоненти вектора  $m$ . Відповідно, «обернений» оператор  $d \rightarrow m$  буде «огрублюючим», який значно збільшує високочастотні складові похибки  $\epsilon$  вектора  $d_{obs}$ . Роль функціонала саме й полягає у «зрізанні» цих високочастотних компонент. Рівень такого «зрізання» регулюється множителем  $\alpha(\epsilon)$  залежно від величини похибки  $\epsilon$ . Ця ідея і називається «регуляризацією» функціонала нев'язки  $R(\cdot)$ .

Незважаючи на задовільні практичні результати, багато дослідників визнавали деяку штучність побудов типу (3.32). Унаслідок цього в 70–80-х рр. ХХ ст. були спроби поставити розв'язання обернених задач на більш надійну методологічну основу. Такі спроби, зокрема в працях [14], [30], привели до розробки нового підходу, названого «інформаційно-ймовірнісним» або «байєсівським». Основу цього підходу становлять такі положення:

I. Найзагальнішим способом визначення (можливого) зв'язку між параметрами  $m$  і даними  $d \in \text{стан інформації}$ , що описується розподілом імовірностей  $P(\cdot)$  у множині  $\mathbf{H}_M \times \mathbf{H}_D$ , зокрема (сукупною) щільністю розподілу ймовірностей  $\phi(m, d)$ .

II. Вихідними даними для розв'язання оберненої задачі виступають два основні стани інформації. По-перше, це *теоретична щільність розподілу ймовірностей*  $\Theta(m, d)$ , яка виражає фізичний закон зв'язку між  $m$  і  $d$  та враховує невизначеність цього зв'язку, зважаючи, наприклад, на недостатню параметризацію або наближений характер цього закону. По-друге, це певна незалежно визначена *апостеріорна щільність розподілу ймовірностей*  $\rho(m, d)$ , що виражає, наприклад, результати раніше проведених досліджень.

III. Розв'язком оберненої задачі є апостеріорна щільність розподілу ймовірностей  $\sigma(m, d)$ , що визначається як *кон'юнкція апостеріорного і теоретичного розподілу ймовірностей*:

$$\sigma(m, d) = k \cdot \frac{\rho(m, d)\Theta(m, d)}{\mu(m, d)}, \quad (3.33)$$

де  $\mu(m, d)$  – *щільність рівномірного розподілу ймовірностей* («функція міри» у колмогорівській трійці визначення ймовірнісного простору).

Положення III, відоме як формула Тарантоли–Валетта [31], по суті є узагальненням класичної теореми Байєса; звідси походить назва зазначеного підходу до розв'язання обернених задач.

Існування і єдиність розв'язку оберненої задачі в цьому підході гарантується положенням III; головною проблемою є отримання з функції  $\sigma(m, d)$  інформації про різні аспекти зв'язку  $m \sim d$  через (3.33). Тому замість терміна «розв'язання (як процес) оберненої задачі» доцільніше вживати термін «дослідження (розв'язку) оберненої задачі».

Питання раціонального вибору апіорної щільності розподілу ймовірностей дуже важливі в теорії та практиці аналізу обернених задач. З одного боку, одним з природних підходів до її обчислення може служити статистичний аналіз «точних» розв'язків однотипних задач, сформованих у схожих умовах. Наприклад, апіорна щільність розподілу параметрів протяжної конструкції може бути розрахована в результаті статистичного аналізу параметрів різних частин цієї конструкції, отриманого незалежними від розглянутих обернених задач способами (наприклад, просвічування пронікальними випромінюваннями, взяття і лабораторний аналіз проб матеріалу тощо). Коли вся конструкція будувалася в схожих умовах, зазначений підхід до визначення апіорної щільності ймовірності дає непогані результати. Однак не завжди у дослідників є такий статистичний матеріал.

З іншого боку, наявний «точний» розв'язок оберненої задачі в множині параметрів у принципі може бути реалізацією багатьох випадкових розподілів. У зв'язку з цим особливої актуальності набувають гнучкі схеми формування апіорних щільностей ймовірності, що мають широкі можливості апроксимації та дають змогу ефективно перевіряти гіпотези як щодо параметрів функцій  $\rho(\mathbf{m}, \mathbf{d})$ , так і (в деяких випадках) теоретичних щільностей ймовірності  $\Theta(\mathbf{m}, \mathbf{d})$ . Один із таких підходів і розглядається в даній праці.

Співвідношення (3.33) має досить загальний характер. З його допомогою можна, наприклад, визначити відособлені щільності розподілу ймовірностей  $\sigma_M(\mathbf{m})$  у множині параметрів:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = \int_{H_D} \sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{d} \quad (3.34)$$

і  $\sigma_D(\mathbf{d})$  у множині даних:

$$\sigma_D(\mathbf{d}) = \int_{H_M} \sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{m}.$$

На практиці вводять низку додаткових гіпотез, що полегшують отримання корисної інформації з апіорної щільності розподілу ймовірностей.

1. Подання апіорної щільності ймовірностей  $\rho(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  у вигляді:

$$\rho(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \rho_M(\mathbf{m}) \rho_D(\mathbf{d}) \quad (3.35)$$

означає, що інформація про розподіл досліджуваної величини в множині параметрів отримана незалежно від відповідної апіорної інформації в множині даних. Аналогічно:

$$\mu(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \mu_M(\mathbf{m}) \mu_D(\mathbf{d}), \quad (3.36)$$

де  $\mu_M(\mathbf{m})$ ,  $\mu_D(\mathbf{d})$  – щільності рівномірного розподілу ймовірностей у множині параметрів і даних відповідно.

2. Можливість подання теоретичної щільності розподілу  $\Theta(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  за формулою повної ймовірності:

$$\Theta(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \theta(\mathbf{d} / \mathbf{m}) \mu_M(\mathbf{m}). \quad (3.37)$$

Через (3.33), (3.35)–(3.37) формула (3.34) перетвориться до вигляду:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = k \cdot \rho_M(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}), \quad (3.38)$$

( $k$  – нормуючий множник), де *функція правдоподібності*  $L(\mathbf{m})$  визначається виразом:

$$L(\mathbf{m}) = \int_{H_D} \frac{\rho_D(\mathbf{d}) \theta(\mathbf{d} / \mathbf{m})}{\mu_D(\mathbf{d})} d\mathbf{d}. \quad (3.39)$$

У трьох важливих окремих випадках вдається проінтегрувати вираз (3.39) за умови постійної щільності рівномірного розподілу ймовірностей  $\mu_D(\mathbf{d}) = const$ .

I. Коли «невизначеності моделізації» малі порівнянно з «невизначеностями спостереження», можна взяти:

$$\theta(\mathbf{d} / \mathbf{m}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m})), \quad (3.40)$$

де  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака, що дає  $L(\mathbf{m}) = \rho_D(\mathbf{g}(\mathbf{m}))$ , і вираз (3.38) для апостеріорної щільності розподілу ймовірностей набуде вигляду:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = k \cdot \rho_M(\mathbf{m}) \rho_D(\mathbf{g}(\mathbf{m})). \quad (3.41)$$

II. Коли можна знехтувати «невизначеностями спостереження» порівнянно з «невизначеностями моделізації»:

$$\rho_D(\mathbf{d}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}),$$

маємо  $L(\mathbf{m}) = \theta(\mathbf{d}_{obs} / \mathbf{m})$  і, відповідно:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = k \cdot \rho_M(\mathbf{m}) \theta(\mathbf{d}_{obs} / \mathbf{m}). \quad (3.42)$$

III. Гауссові невизначеності моделізації:

$$\theta(\mathbf{d} / \mathbf{m}) = k_1 \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))^T \mathbf{C}_T^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))\right\} \quad (3.43)$$

і спостереження

$$\rho_D(\mathbf{d}) = k_2 \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs})^T \mathbf{C}_d^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs})\right\}.$$

У цьому випадку можна показати, що:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = k \cdot \rho_M(\mathbf{m}) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))^T \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))\right\}, \quad (3.44)$$

де результуюча коваріаційна матриця визначається співвідношенням:

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_T + \mathbf{C}_d. \quad (3.45)$$

Коли і для апіорної щільності ймовірності використовується гауссівський розподіл:

$$\rho_M(\mathbf{m}) = k_3 \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior})^T \mathbf{C}_M^{-1}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior})\right\},$$

апостеріорна щільність розподілу ймовірностей дорівнює:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = k \cdot \exp\{-S(\mathbf{m})\},$$

де функція нев'язки  $S(\mathbf{m})$  визначається співвідношенням:

$$S(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))^T \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{g}(\mathbf{m})) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior})^T \mathbf{C}_M^{-1}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{prior}) \right\}. \quad (3.46)$$

У випадку лінійного відображення  $\mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{G}\mathbf{m}$  ( $\mathbf{G}$  – матриця перетворення) розв'язок оберненої задачі виписується в явному вигляді: апостеріорна щільність розподілу  $\sigma_M(\mathbf{m})$  є гауссівською з коваріаційною матрицею:

$$\tilde{\mathbf{C}}_M = (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1})^{-1} \quad (3.47)$$

і середнім значенням:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_{prior} + \tilde{\mathbf{C}}_M \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G}\mathbf{m}_{prior}). \quad (3.48)$$

Коли оператор  $\mathbf{g}(\cdot)$  «не дуже відрізняється» від лінійного, формули (3.47), (3.48) зберігають своє значення, якщо навколо точки  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{prior}$  використовується лінеаризація:

$$\mathbf{G} = (G_{ij}) = \left. \left( \frac{\partial g_i}{\partial m_j} \right) \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_{prior}}. \quad (3.49)$$

В інших випадках для отримання необхідної інформації з апостеріорної щільності ймовірності  $\sigma_M(\mathbf{m})$  необхідно використовувати наявний арсенал методів аналізу функцій багатьох змінних. На практиці в більшості

випадків значення  $\sigma_M(\mathbf{m})$  суттєво відрізняються від нуля лише в невеликих областях навколо точок максимуму апостеріорної гіпотези:

$$L_p(\mathbf{m}) = \frac{\sigma_M(\mathbf{m})}{\mu_M(\mathbf{m})} \rightarrow \max \quad (3.50)$$

або для зручності її логарифма (і, відповідно, точок мінімуму функції нев'язки  $S(\mathbf{m})$ ):

$$\Psi_p(\mathbf{m}) = \log \left\{ \frac{\sigma_M(\mathbf{m})}{\mu_M(\mathbf{m})} \right\} = -S(\mathbf{m}).$$

Для оцінки поведінки функції  $L_p(\mathbf{m})$  поблизу локальних максимумів може бути використана локальна матриця коваріацій  $\tilde{C}_M$ , що визначена як обернена до гессіана  $\mathbf{H}$  функції  $S(\mathbf{m})$ :

$$\tilde{C}_M = (\mathbf{H})^{-1} = \left( \frac{\partial^2 S(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^2} \right)^{-1},$$

або наближення до неї за формулами (3.47), (3.49).

У загальному випадку для дослідження апостеріорної щільності розподілу ймовірностей застосовують методи статистичних випробувань (Монте-Карло).

Отримання якісних розв'язків  $\sigma_M(\mathbf{m})$  значно залежить від вибору гнучких схем апроксимації щільності розподілів  $\rho_M(\mathbf{m})$ ,  $\rho_D(\mathbf{d})$ ,  $\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ , що входять до складу співвідношень (3.41), (3.42), (3.44). Ці схеми мають виконувати такі основні завдання.

1. Перевірити обґрунтованість використання відповідних параметрів зазначених вихідних щільності розподілів. Наприклад, з'ясувати, чи не є занадто оптимістичними (переоціненими) значення середньоквадратичних відхилень параметрів невідомого вектора  $\mathbf{m}$  для заданого вектора спостережуваних значень  $\mathbf{d}_{obs}$  і відповідної матриці коваріацій  $\mathbf{C}_D$ .

2. Виявити й усунути так звані «аномальні значення» вектора даних  $\mathbf{d}_{obs}$  («викиди»), використання яких у моделі (3.33) може призвести до неякісних розв'язків.

3. Знайти схему дискретизації параметрів у множині  $\mathbf{H}_M$ , яка забезпечує найкращу (принаймні «добру») роздільну здатність відповідно до наявної інформації про результати вимірювань  $\mathbf{d}_{obs}$ .

У даній праці запропонована блокова схема апроксимації щільності ймовірності розподілів, що входять до узагальненої формули Байєса (3.33), яка сприяє розв'язанню зазначених задач.

### 3.5. Блокова модель задачі з розподіленими параметрами

Розіб'ємо вектори параметрів  $\mathbf{m}$  і модельних даних  $\mathbf{d}$  на блоки (рис. 3.7):

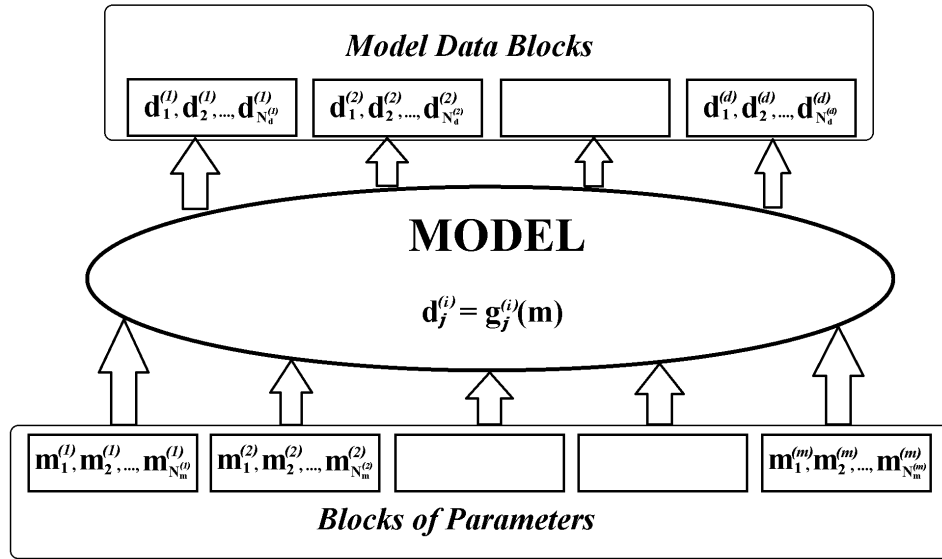


Рис. 3.7. Блочна модель оберненої задачі

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^{(1)} \otimes \mathbf{m}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{m}^{(m)},$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^{(1)} \otimes \mathbf{d}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}^{(d)}.$$

Зробимо такі припущення щодо введених блоків параметрів і модельних даних.

I. Кожен блок параметрів  $\mathbf{m}^{(i)} = \{m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \dots, m_{N_m^{(i)}}^{(i)}\}^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  має незалежний від інших блоків апіорний розподіл імовірностей зі щільністю  $\rho_M^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)})$ .

II. Щільності ймовірності  $\rho_D^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , відповідні спостережуваним значенням блоків  $\mathbf{d}^{(i)} = \{d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \dots, d_{N_d^{(i)}}^{(i)}\}^T$ , також не залежні одна від одної (спостереження даних одного блоку проводяться незалежно від інших блоків).

III. Для кожного з блоків параметрів (даних) щільності розподілу ймовірностей  $\rho_M^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)})$ ,  $\rho_D^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)})$  можуть бути одного з трьох типів (щільності наведені з точністю до постійного нормуючого множника).

1. Гауссівський (Gaussian) розподіл.

$$\rho_M^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = \exp\{-S_{mG}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)})\}, \quad (3.51)$$



$$\rho_D^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = \exp\{-S_{dG}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)})\}. \quad (3.52)$$

Тут:

$$S_{mG}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{m}^{(i)} - \mathbf{m}_{prior}^{(i)})^T (\mathbf{C}_M^{(i)})^{-1} (\mathbf{m}^{(i)} - \mathbf{m}_{prior}^{(i)}), \quad (3.53)$$

$$S_{dG}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{d}_{obs}^{(i)})^T (\mathbf{C}_D^{(i)})^{-1} (\mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{d}_{obs}^{(i)}) \quad (3.54)$$

– функції нев’язки блока параметрів і даних, відповідно.

В останньому виразі матриця коваріацій для блока даних ураховує невизначеності моделізації та вимірювань (3.45).

2. Розподіл Лапласа, «довгохвостий» (Longtail).

$$\rho_M^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = \exp\{-S_{mL}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)})\},$$

$$\rho_D^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = \exp\{-S_{dL}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)})\},$$

де функції нев’язки блока параметрів і даних визначаються співвідношеннями:

$$S_{mL}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{N_m^{(i)}} S_{jm}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}), \quad (3.55)$$

$$S_{dL}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{N_d^{(i)}} S_{jd}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}); \quad (3.56)$$

функції нев’язки  $S_{jm}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)})$  і  $S_{jd}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)})$  для  $j$ -ї змінної виражаються так:

$$S_{jm}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = \left| \frac{m_j^{(i)} - m_{j\ prior}^{(i)}}{\sigma_{Mj}^{(i)}} \right|,$$

$$S_{jd}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = \left| \frac{d_j^{(i)} - d_{j\ obs}^{(i)}}{\sigma_{Dj}^{(i)}} \right|.$$

3. Рівномірний розподіл (Boxcar).

$$\rho_M^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо для всіх } j = 1, 2, \dots, N_m^{(i)} \quad S_{jm}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) \leq 1, \\ 0, & \text{якщо для хоча б одного } j \quad S_{jm}^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) > 1. \end{cases}$$

$$\rho_D^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо для всіх } j = 1, 2, \dots, N_d^{(i)} \quad S_{jd}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) \leq 1, \\ 0, & \text{якщо для хоча б одного } j \quad S_{jd}^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) > 1. \end{cases} \quad (3.57)$$

Вектор параметрів  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_M$  назвемо допустимим щодо Вохсаг-блока з індексом  $i = 1, 2, \dots, m$ , якщо  $\rho_M^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = 1$ , і недопустимим, якщо  $\rho_M^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}) = 0$ . Аналогічно, вектор модельних даних  $\mathbf{d} \in \mathbf{H}_D$  допустимий щодо Вохсаг-блока з індексом  $i = 1, 2, \dots, d$ , якщо  $\rho_D^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = 1$ , і недопустимий, якщо  $\rho_D^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)}) = 0$ . Якщо ж блок не має типу Вохсаг, то будь-який вектор вважатимемо щодо нього допустимим.

IV. Невизначеності моделізації  $\theta^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)} / \mathbf{m})$  для  $i$ -го блока даних,  $i = 1, 2, \dots, d$ , мають вигляд (3.40):

$$\theta^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)} / \mathbf{m}) = \delta^{(i)}(\mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{m})). \quad (3.58)$$

У разі блока даних типу Gaussian можна також використовувати гауссівський закон розподілу типу (3.43); при цьому вважатимемо, що в результатуючому розподілі (3.44) коваріаційної матриці  $\mathbf{C}_D^{(i)}$  вже враховані невизначеності моделізації та вимірювань за формулою (3.45).

З (3.58) і (3.39) витікає такий вираз для функції правдоподібності  $i$ -го блока даних:

$$L^{(i)}(\mathbf{m}) = \rho_D^{(i)}(\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{m})),$$

$$\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{m}) = \{g_1^{(i)}(\mathbf{m}), g_2^{(i)}(\mathbf{m}), \dots, g_{N_d^{(i)}}^{(i)}(\mathbf{m})\}^T, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Вектор параметрів  $\mathbf{m}$  вважатимемо допустимим щодо  $i$ -го блока модельних даних, якщо  $L^{(i)}(\mathbf{m}) > 0$ , і недопустимим, якщо  $L^{(i)}(\mathbf{m}) = 0$ .

V. Введені щільності ймовірності розподілу для блоків параметрів визначають «природну» метрику для кожного блока. А саме відповідні норми для введених блоків мають такий вигляд.

1. Gaussian. Узагальнена квадратична норма  $\|\cdot\|_2$ , асоційована з коваріаційною матрицею  $\mathbf{C}_M^{(i)}$ :

$$\|\mathbf{m}^{(i)}\|_2 = \left\{ \mathbf{m}^{(i)T} (\mathbf{C}_M^{(i)})^{-1} \mathbf{m}^{(i)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.59)$$

1. Longtail. Узагальнена сумарна норма  $\|\cdot\|_1$ , асоційована з вектором середньоквадратичних відхилень  $\{\sigma_M^{(i)}\}$ :

$$\|\mathbf{m}^{(i)}\|_1 = \sum_{j=1}^{N_m^{(i)}} \left| \frac{m_j^{(i)}}{\sigma_{Mj}^{(i)}} \right|. \quad (3.60)$$

2. Вохсар. Узагальнена максимальна («мінімаксна») норма  $\|\cdot\|_\infty$ , асоційована з вектором середньоквадратичних відхилень  $\{\sigma_M^{(i)}\}$ :

$$\|\mathbf{m}^{(i)}\|_\infty = \max_j \left| \frac{m_j^{(i)}}{\sigma_{Mj}^{(i)}} \right|. \quad (3.61)$$

Крім «природної», для кожного блока параметрів можна задавати іншу метрику трьох перерахованих типів.

Отримаємо вираз для апостеріорної щільності ймовірності (3.34) розподілу вектора модельних параметрів  $\mathbf{m}$  розглянутої моделі I–V. Множини індексів блоків параметрів  $I^m = \{1, 2, \dots, m\}$  і даних  $I^d = \{1, 2, \dots, d\}$  розіб'ємо на підмножини, які відповідають типам блоків Gaussian, Longtail і Вохсар:  $I^m = I_G^m \cup I_L^m \cup I_B^m$ ,  $I^d = I_G^d \cup I_L^d \cup I_B^d$ . Позначимо  $I_{GL}^m = I_G^m \cup I_L^m$ ,  $I_{GL}^d = I_G^d \cup I_L^d$ . Вектор параметрів  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_M$  називатимемо допустимим (щодо моделі I–V), якщо він є допустимим для кожного з блоків параметрів і модельних даних, що входять у модель. З урахуванням (3.18), а також припущень I–IV отримаємо:

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = \begin{cases} k \cdot \exp\{-S(\mathbf{m})\}, & \text{якщо } \mathbf{m} \text{ є допустимим вектором,} \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (3.62)$$

Функція нев'язки  $S(\mathbf{m})$  визначається співвідношенням:

$$S(\mathbf{m}) = S_m(\mathbf{m}) + S_d(\mathbf{m}), \quad (3.63)$$

де функції нев'язки за параметрами  $S_m(\mathbf{m})$  і за даними  $S_d(\mathbf{m})$  визначаються як:

$$S_m(\mathbf{m}) = \sum_{i \in I_{GL}^m} S_m^{(i)}(\mathbf{m}^{(i)}), \quad (3.64)$$

$$S_d(\mathbf{m}) = \sum_{i \in I_{GL}^d} S_d^{(i)}(\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{m})). \quad (3.65)$$

Нев'язки для блоків параметрів  $S_m^{(i)}$  і даних  $S_d^{(i)}$  виражаються залежно від типу блока співвідношеннями (3.51)–(3.56).

У багатьох випадках для дослідження апостеріорної щільності (3.62) необхідно знайти точку в множині  $\mathbf{H}_M$ , що відповідає максимальній апостеріорній гіпотезі (точку мінімуму функції  $S(\mathbf{m})$ ), а також у разі мульт-

тимодальних розв'язків, та аргументи інших локальних максимумів функції  $\sigma_M(\mathbf{m})$ . Для цього зазвичай використовують градієнтні методи мінімізації нев'язочної функції (3.63). Випишемо вираз для градієнта цієї функції,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(1)} \otimes \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(1)} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(m)}$  для допустимої точки  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_M$ . Градієнт  $i$ -го блока параметрів через (3.63) визначається як:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_m^{(i)} + \sum_{k \in I_{GL}^d} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_d^{(k)(i)}, \quad i \in I^m.$$

Блочні градієнти  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_m^{(i)}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_d^{(k)(i)}$  для кожного типу блока через (3.53)–(3.57), (3.64), (3.65) визначаються співвідношеннями:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_m^{(i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Gm}^{(i)} = (\mathbf{C}_M^{(i)})^{-1}(\mathbf{m}^{(i)} - \mathbf{m}_{prior}^{(i)}), \quad i \in I_G^m,$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_m^{(i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Lm}^{(i)} = \left\{ \frac{1}{\sigma_{Mj}^{(i)}} \operatorname{sgn} \left( \frac{m_j^{(i)} - m_{j \text{ prior}}^{(i)}}{\sigma_{Mj}^{(i)}} \right) \right\}_j, \quad j = \overline{1, N_m^{(i)}}, \quad i \in I_L^m,$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_m^{(i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Bm}^{(i)} = \mathbf{0}, \quad i \in I_B^m,$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_d^{(k)(i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Gd}^{(k)(i)} = (\mathbf{G}^{(k)(i)})^T (\mathbf{C}_D^{(i)})^{-1}(\mathbf{g}^{(k)}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}^{(k)}), \quad k \in I_G^d, \quad i \in I^m,$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_d^{(k)(i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Ld}^{(k)(i)} = (\mathbf{G}^{(k)(i)})^T \left\{ \frac{1}{\sigma_{Dj}^{(i)}} \operatorname{sgn} \left( \frac{g_j^{(k)}(\mathbf{m}) - d_{j \text{ obs}}^{(k)}}{\sigma_{Dj}^{(i)}} \right) \right\}_j, \quad k \in I_L^d, \quad i \in I^m, \\ j = \overline{1, N_d^{(k)}},$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_d^{(k)(i)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Bd}^{(k)(i)} = \mathbf{0}, \quad k \in I_B^d, \quad i \in I^m.$$

Матриці-блоки похідних  $\mathbf{G}^{(k)(i)}$ ,  $k \in I^d$ ,  $i \in I^m$  мають вигляд:

$$\mathbf{G}^{(k)(i)} = (\mathbf{G}^{(k)(i)})_{lj} = \left( \frac{\partial g_l^{(k)}(\mathbf{m})}{\partial m_j^{(i)}} \right), \quad l = \overline{1, N_d^{(k)}}, \quad j = \overline{1, N_m^{(i)}}.$$

Вектор найшвидшого підйому  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^{(1)} \otimes \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\gamma}^{(m)}$  має у своєму складі вектори-блоки  $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ ,  $i \in I^m$ , асоційовані в «природній» матриці з нормами (3.59)–(3.61), компоненти яких визначаються виразами:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \boldsymbol{\gamma}_G^{(i)} = \mathbf{C}_M^{(i)} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(i)}, \quad i \in I_G^m,$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \boldsymbol{\gamma}_L^{(i)} = (\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Lj}^{(i)})_{j=1, \overline{N_m^{(i)}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K} \cdot \sigma_{Mj}^{(i)} \cdot \text{sgn}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j^{(i)}), \text{ якщо} \\ j\text{-та компонента є} \\ \text{головною для вектора } \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(i)}; \\ 0 \text{ – для інших компонент} \end{array} \right\}_j, i \in I_L^m,$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \boldsymbol{\gamma}_B^{(i)} = (\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{Bj}^{(i)})_{j=1, \overline{N_m^{(i)}}} = \left\{ \sigma_{Mj}^{(i)} \cdot \text{sgn}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j^{(i)}) \right\}_j, i \in I_B^m.$$

Головною компонентою вектора  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(i)}$  буде компонента, для якої величина  $\sigma_{Mj}^{(i)} / \hat{\boldsymbol{\gamma}}_j^{(i)}$  досягає свого максимального значення,  $j = \overline{1, N_m^{(i)}}$ ;  $K$  – кількість головних компонент.

Маючи формули для компонент вектора  $\boldsymbol{\gamma}$ , можна реалізувати метод найшвидшого спуску в такий спосіб:

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n - \mu_n \mathbf{F}_n \boldsymbol{\gamma}_n,$$

де  $n$  – номер ітерації методу;  $\mathbf{F}_n$  – оператор передобумовлення; множник  $\mu_n$  може бути знайдений, наприклад, методом одновимірного пошуку мінімуму функції (3.63).

Коли вектор параметрів  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_M$  не є допустимим, у процесі реалізації методу найшвидшого спуску спочатку має бути досягнута (за можливості) допустима область. Для цього використовується процес мінімізації наступної функції (так званий «критерій мінімаксу»)

$$R(\mathbf{m}) = \max\{R_m(\mathbf{m}), R_d(\mathbf{m})\} \rightarrow \min, \quad (3.66)$$

де

$$R_m(\mathbf{m}) = \max_{i \in I_B^m, j=1, \overline{N_m^{(i)}}} \left( \left| \frac{m_j^{(i)} - m_{j \text{ prior}}^{(i)}}{\sigma_{Mj}^{(i)}} \right| \right), \quad (3.67)$$

$$R_d(\mathbf{m}) = \max_{i \in I_B^d, j=1, \overline{N_d^{(i)}}} \left( \left| \frac{g_j^{(k)}(\mathbf{m}) - d_{j \text{ obs}}^{(k)}}{\sigma_{Dj}^{(i)}} \right| \right).$$

### 3.6. Загальний алгоритм дослідження обернених задач з використанням блоково-параметричного підходу

Загальний алгоритм дослідження обернених задач з використанням викладеного блоково-параметричного підходу може виглядати так:

1. Побудова блоків спостережуваних даних і невідомих параметрів моделі, що формується. Така побудова виконується з урахуванням правдоподібності гіпотези про статистичну незалежність формованих блоків змінних. Якщо вважається, що кореляція між змінними має бути врахована, то ці змінні слід включити в один блок.

2. Виявлення аномальних значень спостережуваних даних («викидів»). Для цього блок даних, що перевіряється, оголошується блоком типу Longtail (блоки параметрів при цьому можуть бути типу Вохсаг із якомога більшим значенням величини середньоквадратичного відхилення), після чого визначається точка в просторі параметрів, що відповідає максимальній апостеріорній гіпотезі (3.50). Для цієї точки потім аналізуються нев'язки (3.56) для кожної з точок блока даних, що перевіряється; рішення про те, чи вважати відповідне значення «викидом», приймається на основі статистичних критеріїв, аналогічних до критеріїв Граббса, Ірвіна і безлічі їх сучасних аналогів [32]. Виявлені точки викидів або видаляються з розгляду, або замінюються інтерполянтами на декількох сусідніх точках.

3. Уточнення значень параметрів невизначеності для блоків спостережуваних даних і модельних параметрів. Помилкові значення параметрів невизначеності даних зазвичай пов'язані з неправильним визначенням точності вимірювань або неправильно обраними параметрами сканувальних приладів і можуть істотно вплинути на якість розв'язку оберненої задачі. Для перевірки блокам даних і параметрів присвоюється тип Вохсаг, причому для блоків параметрів установлюють якомога більші значення середньоквадратичного відхилення, а відповідні параметри невизначеності для блоків даних можуть варіюватися. Якщо критерій мінімаксу (3.66) як розв'язок дає недопустиму точку (тобто апостеріорна щільність ймовірності тотожна нулеві), це означає, що середньоквадратичне відхилення для блока спостережуваних даних переоцінене і необхідно його збільшити.

Коли невизначеності вимірюваних даних порівняно невеликі, має сенс уточнити значення невизначеностей для блоків модельних параметрів. Для цього у згаданій схемі середньоквадратичні відхилення для блоків даних фіксуються, а для блоків параметрів, навпаки, варіюються. Шуканими оцінками для невизначеностей блоків параметрів будуть такі (мінімальні), для яких критерій мінімаксу (3.66) дає допустиму точку в просторі параметрів.

4. На цьому етапі, використовуючи уточнені оцінки невизначеності блоків параметрів і даних, визначається доцільний рівень параметризації. Для блоків параметрів і даних використовується, як правило, тип Gaussian, хоча, звичайно, існує можливість використовувати й інші типи невизначеностей. Для визначення відповідного рівня параметризації можуть бути використані методи, аналогічні запропонованим ще О. Г. Івахненком «ме-

тодам групового обліку аргументів» [33]. Основна суть таких методів полягає в побудові деякої ієрархії рівнів параметризації та послідовній перевірці моделі на різних рівнях, починаючи з найнижчого (рівня, що містить найбільш «грубу» параметризацію). «Правило зупинки» на деякому рівні ієрархії визначається за допомогою відповідних інформаційних критеріїв (критерій Акаїке, байєсівський інформаційний критерій і т. д. [34]).

### 3.7. Числові результати моделювання двошарового пакета з невідомою границею розділу між шарами

Розглянемо пружний двошаровий пакет у формі квадрата зі стороною  $a$  в безрозмірних координатах  $\tilde{x} = x/a$ ,  $\tilde{y} = y/a$  (рис. 3.8) з умовними товщинами шарів  $\tilde{h}_1 = h_1/a = 1/2$ ,  $\tilde{h}_2 = h_2/a = 1/2$  (нумерація шарів починається з найнижчого).

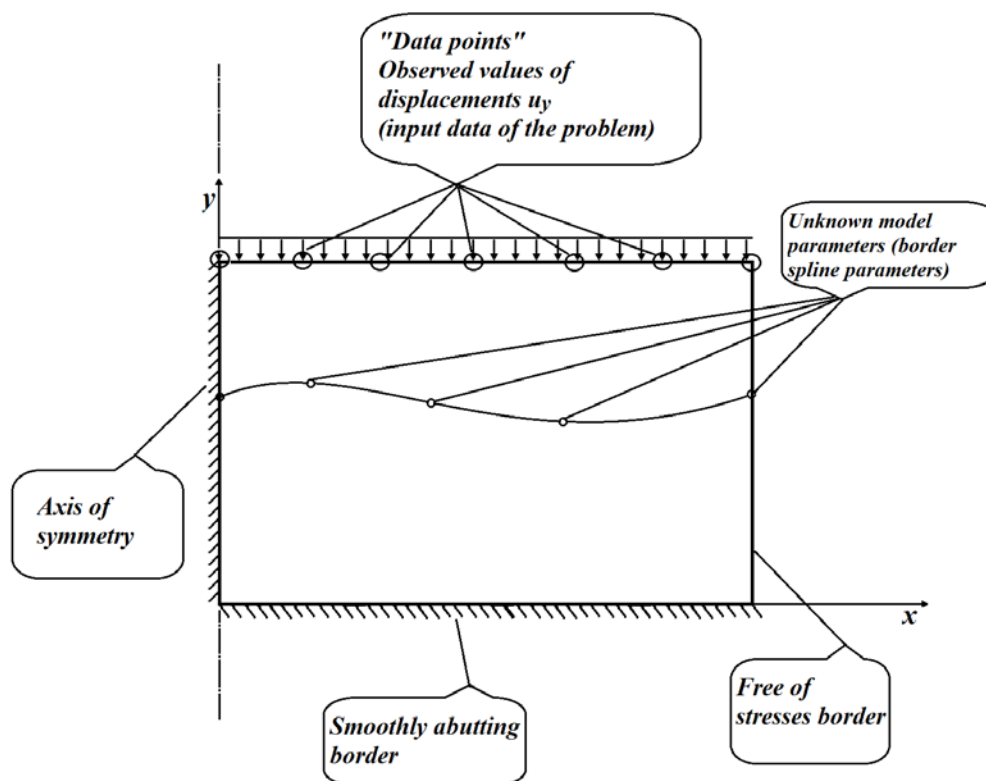


Рис. 3.8. Схема навантаження, спостережуваних даних і невідомих параметрів модельної задачі

Матеріали шарів пакета вважаються ізотропно-пружними з модулями зсуву  $G_1 = 2G$ ,  $G_2 = G$  і коефіцієнтами Пуассона  $\mu_1 = 0,25$ ,  $\mu_2 = 0,35$ , відповідно. Розглядається плоска деформація пакета, що перебуває під дією рівномірно розподіленого на верхній (прямолінійній) поверхні рівномірного навантаження інтенсивності  $q$ . Ліва бічна границя пакета є віссю симетрії конструкції, права – вільна від напружень. Шари пакета вважаються

жорстко зчепленими («склеєними») між собою; нижній шар пакета може ковзати без тертя по твердій основі. Невідому границю розділу між шарами будемо апроксимувати квадратичним сплайном  $\tilde{y} = \tilde{h}_1 + S_1(\tilde{x})$ , побудованим на вузлах інтерполяції  $\tilde{x}_i = i h_m$ ,  $i = -1, 0, 1, 2, \dots, N_m - 2$ ,  $h_m = 1/(N_m - 2)$ . Фіктивний вузол  $\tilde{x}_{-1} = -h_m$  введений для забезпечення можливості завдання довільного значення кута нахилу кривої  $\tilde{y} = \tilde{h}_1 + S_1(\tilde{x})$  в точці  $\tilde{x}_0 = 0$ . Початкова умова для побудови сплайна має вигляд  $S_1'(\tilde{x}_{-1}) = 0$ . Вектор параметрів  $\mathbf{m}$  задачі утворений єдиним блоком  $\mathbf{m}^{(1)} = \{m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \dots, m_{N_m}^{(1)}\}^T = \mathbf{s}^{(1)} = \{s_{-1}^{(1)}, s_0^{(1)}, \dots, s_{N_m-2}^{(1)}\}^T$ , елементи якого є значеннями функції  $s_1(\tilde{x})$  у відповідних вузлах інтерполяції.

Вектор модельних даних  $\mathbf{d}$  задачі також складається з одного блока  $\mathbf{d}^{(1)} = \{d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_{N_d}^{(1)}\}^T = \{\tilde{v}_{y0}, \tilde{v}_{y1}, \dots, \tilde{v}_{yN_d-1}\}^T$ , де  $\tilde{v}_{yj}$  – безрозмірні вертикальні переміщення точок верхньої поверхні пакета у вузлах рівномірного розбиття  $\tilde{x}_j = j h_d$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N_d - 1$ ,  $h_d = 1/(N_d - 1)$  (рис. 3.9):

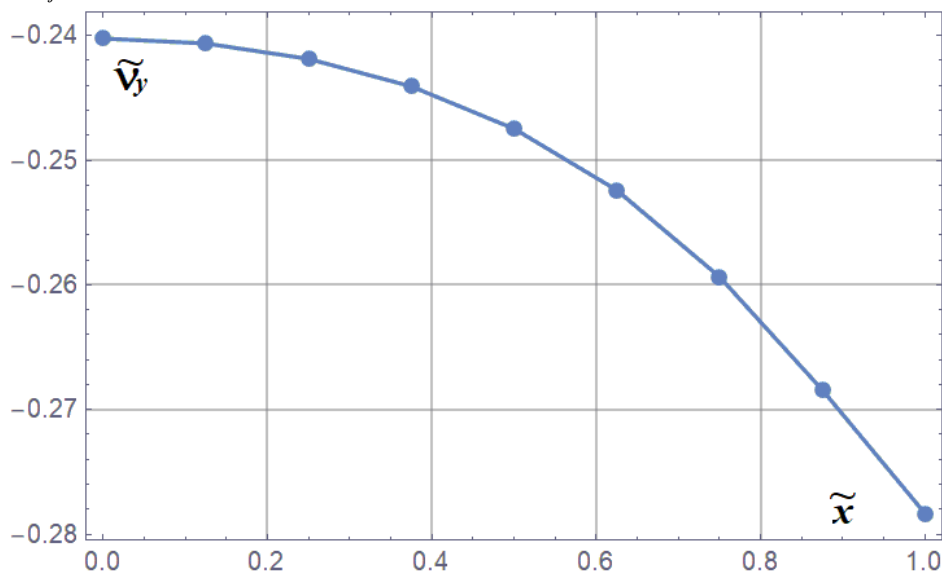


Рис. 3.9. Залежність величини переміщення  $\tilde{v}_{yj}$  від безрозмірної координати  $\tilde{x}_i = i h_m$

$$\tilde{v}_{yj} = \tilde{v}_y(\tilde{x}_j) = \frac{v_y(\tilde{x}_j)G}{aq}.$$

Тут і надалі під «розв'язком оберненої задачі» розумітимемо точку в просторі параметрів  $\mathbf{H}_M$ , що відповідає максимальній апостеріорній гіпотезі. Розглянемо задачу уточнення параметра середньоквадратичного відхилення невизначеності спостережуваних даних. Для цього зафіксуємо певне значення вектора параметрів  $\mathbf{m}^{(1)} = \{0,025; 0,00625; -0,00625; -0,025; 0; 0,025\}^T$



( $N_m = 6$ ), для якого обчислимо відповідне поле переміщень ( $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y$ ). Питання побудови сіток для розв'язання зазначеної «прямої задачі», а також налаштування параметрів багатосіткового ітераційного алгоритму її розв'язання розглянуто в працях [27], [17]. Сформуємо вектор спостережуваних даних  $\mathbf{d}_{obs}$ , взявши значення переміщень  $\tilde{v}_y$  у відповідних вузлах рівномірного розбиття верхньої поверхні пакета ( $N_d = 9$ ) і наклавши на них випадковий гауссівський «шум» з параметром середньоквадратичного відхилення  $\sigma_D^{noise} = 0,001$  (однаковим для всіх точок) та автокореляційною функцією Лапласа  $\rho(x) = \exp(-x/l)$  ( $l = 0,7$ ). Сформулюємо обернену задачу, присвоївши блокам параметрів та даних невизначеність типу Boxcar. Для невизначеності блока параметрів приймемо  $\sigma_M = 0,1$  (також однакове для всіх точок) і нульове середнє значення для всіх параметрів, а значення  $\sigma_D$  для блока даних варіюватимемо, щоразу знаходячи розв'язки з мінімальним значенням  $R$ -критерію (3.66). На рис. 3.10а зображена залежність значення  $R$  від величини  $\sigma_D$ , а на рис. 3.10б – розв'язок оберненої задачі для  $\sigma_D = 0,0016$  (зображено жирною лінією) та заданий «точний» розв'язок (тонка лінія).

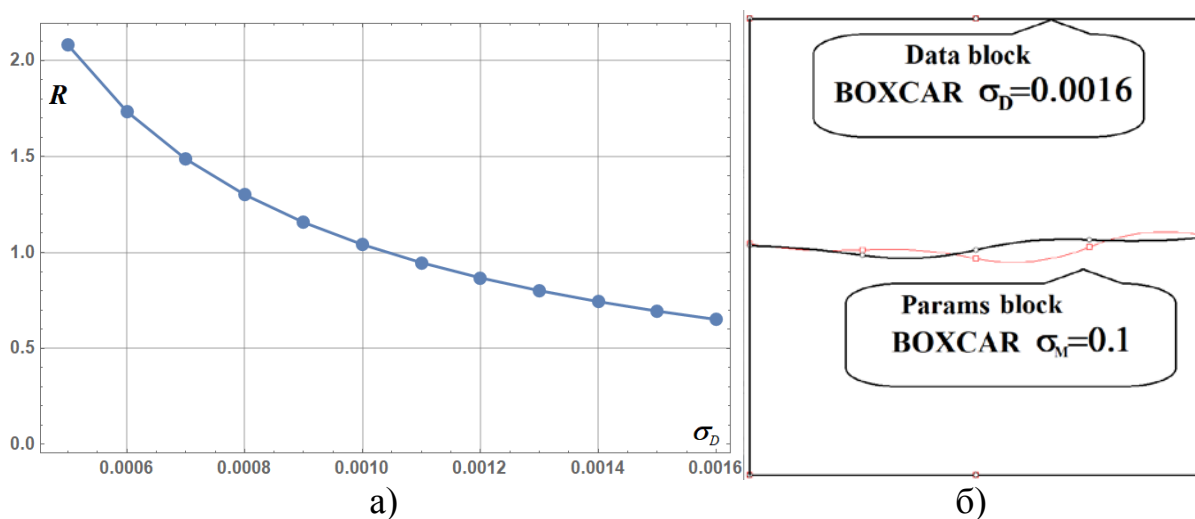


Рис. 3.10: а) залежність значення критерію мінімаксу  $R$  (66) від величини  $\sigma_D$  ;  
 б) наближений розв'язок оберненої задачі (жирна лінія)  
 та «точний розв'язок» (тонка лінія)

Невисока якість розв'язку оберненої задачі (рис. 3.10б) пов'язана з (відносно) високою величиною «шуму» даних. Однак така модель дає змогу досить точно оцінити «амплітуду» такого шуму (див. абсцису точки перетину графіка на рис. 3.10а, з горизонтальною прямою  $R = 1$ ). Коли спостережувані дані визначені досить точно, є змога оцінити також «розмах коливань» значень параметрів. Розглянемо аналогічну модель, коли на дані не

накладено шум, блоки даних і параметрів мають тип Вохсар,  $\sigma_D = 0,0001$ , а значення  $\sigma_M$  варіюється. Розв'язок оберненої задачі знову визначається з використанням критерію мінімаксу (3.66). На рис. 3.11 зображена залежність  $R = R(\sigma_M)$  і наближений розв'язок оберненої задачі за  $\sigma_M = 0,1$ .

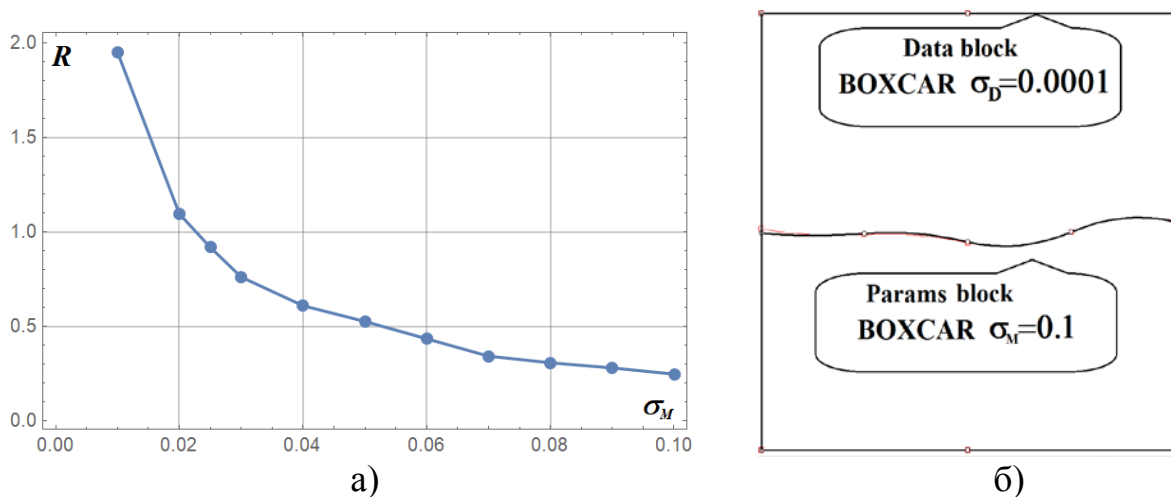


Рис. 3.11. а) графік залежності  $R = R(\sigma_M)$ ; б) розв'язок оберненої задачі (жирна лінія) та «точний розв'язок» (тонка лінія)

Розглянемо задачу визначення аномальних значень («викидів») спостережуваних даних. У задачі внесемо збурення величиною в 0,001 «точно» значення даного  $d_4^{(1)} = \tilde{v}_{y_3}$  для  $\tilde{x}_3 = 0,375$ . Результати розрахунків за двома моделями зображено на рис. 3.12–3.13.

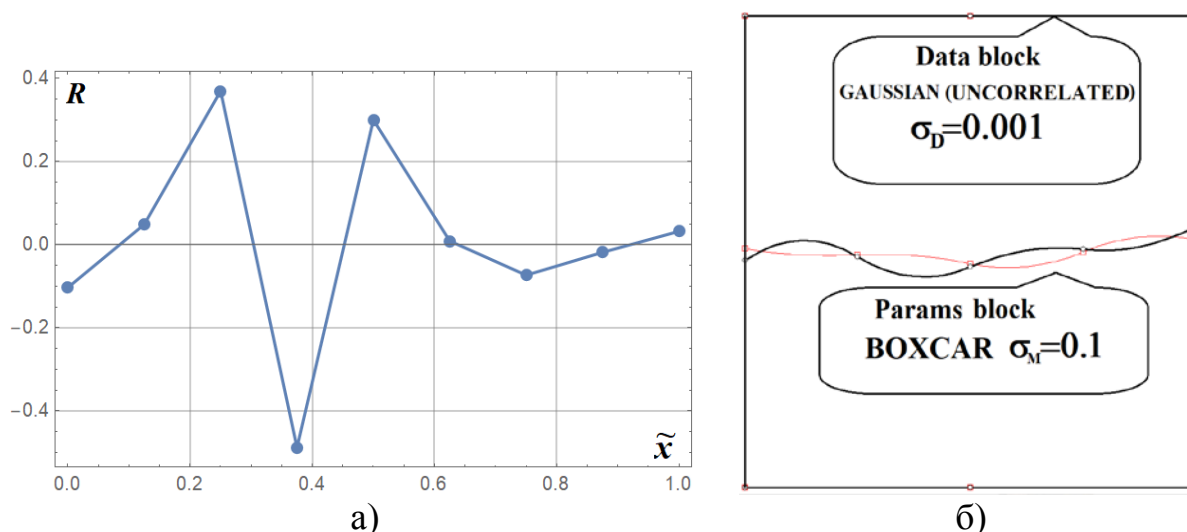


Рис. 3.12. Модель «Gaussian»:

- а) графік нормалізованої нев'язки за даними  $R_d^{(1)}(m, \tilde{x}_j)$ ;
- б) наближений розв'язок оберненої задачі (жирна лінія) та «точний розв'язок» (тонка лінія)

Для першої моделі невизначеність даних береться такою, що має тип Gaussian з одиничною матрицею кореляцій (некорельований або «білий» шум) і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_D = 0,001$ . У другій моделі невизначеність даних розглядається як Longtail з таким самим середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_D = 0,001$ . Для невизначеності параметрів обох моделей використовується тип Boxcar з нульовим середнім для всіх параметрів і середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_M = 0,1$  (по суті випадок відсутності «регуляризації»).

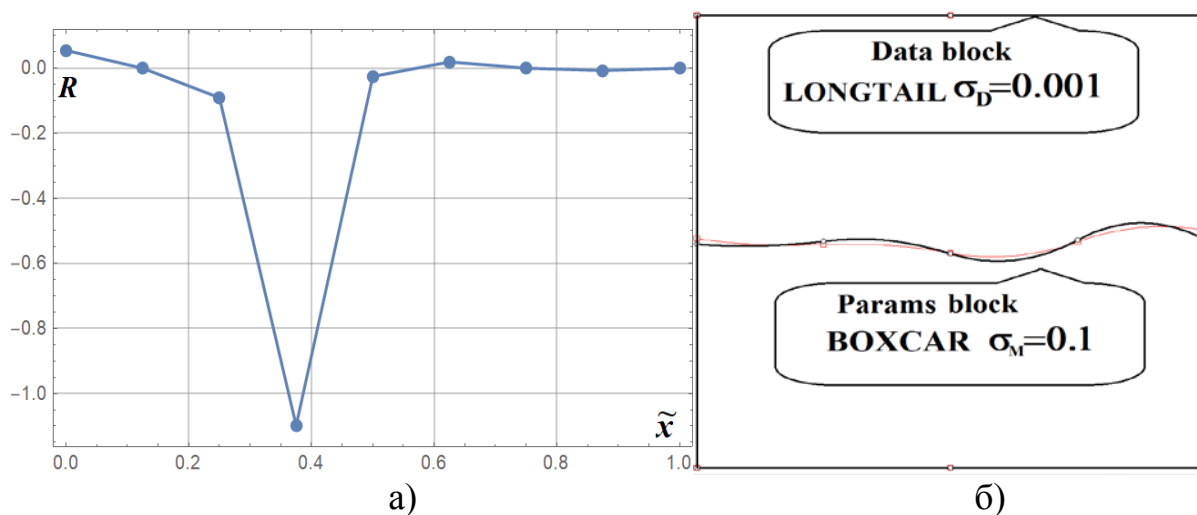


Рис. 3.13. Модель «Longtail»:

- а) графік нормалізованої нев'язки за даними  $R_d^{(1)}(\mathbf{m}, \tilde{x}_j)$ ;
- б) наближений розв'язок оберненої задачі (жирна лінія) та «точний розв'язок» (тонка лінія)

На рис. 3.12а і 3.13а зображено графіки величини нормалізованої нев'язки:

$$R_d^{(1)}(\mathbf{m}, \tilde{x}_j) = \frac{g_j^{(1)}(\mathbf{m}) - d_{j\text{obs}}^{(1)}}{\sigma_{Dj}^{(1)}}, \quad j = 1, 2, \dots, N_d$$

у вузлах блока даних для двох розглянутих моделей. З графіків видно, що модель «Gaussian» «розмазує» величину збурення («викиду») на сусідніх точках, водночас як модель «Longtail» дає змогу точно локалізувати «викид» і оцінити його величину. Крім того, із порівняння рис. 3.12б, і 3.13б можна бачити, що розв'язок оберненої задачі в моделі «Longtail», на відміну від моделі «Gaussian», зберігає прийнятну якість.

На рис. 3.14 проілюстровано вплив рівня «шуму даних» на якість розв'язку оберненої задачі за відсутності «регуляризації».

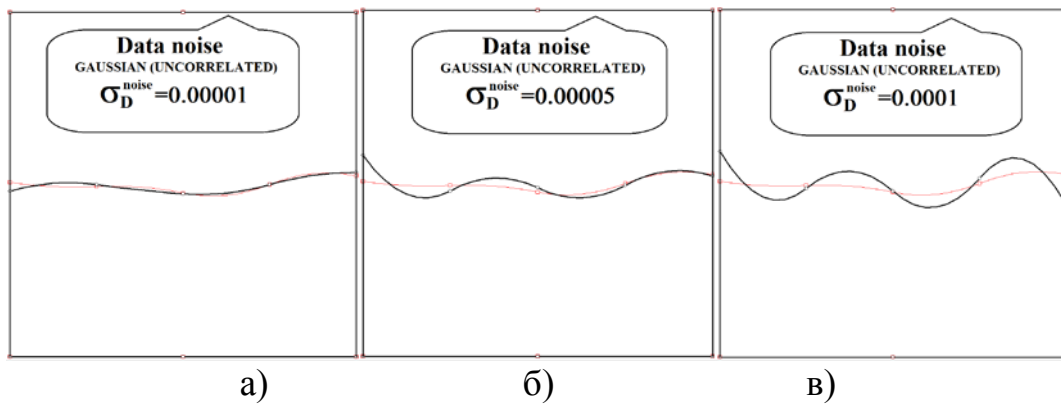


Рис. 3.14. Чутливість розв'язку оберненої задачі від рівня «шуму» спостережуваних даних

Розглядається модель з невизначеністю даних типу «некорельований Gaussian» із середньоквадратичним відхиленням  $\sigma_D = 0,0001$ ; невизначеність параметрів має тип Вохсар із параметром  $\sigma_M = 0,1$ . На точні значення спостережуваних даних накладено «білий шум» (невизначеність типу «некорельований Gaussian») з параметром  $\sigma_D^{\text{noise}}$  середньоквадратичного відхилення, що послідовно збільшується. Результати розв'язання оберненої задачі для деяких значень цього параметра зображено на рис. 3.14.

Відсутність «регуляризації» для цих значень параметра  $\sigma_D^{\text{noise}}$  означає, що тут не «спрацьовують» обмеження на значення параметрів, що задаються невизначеністю Вохсар, тобто нев'язка (3.67) у розв'язку оберненої задачі чітко менша одиниці. З рис. 3.14 випливає, що регуляризація може знадобитися зі значеннями параметра шуму  $\sigma_D^{\text{noise}} > 0,00005$ . Чутливість розв'язку до шуму в даній задачі визначається кількома параметрами, зокрема умовами навантаження і співвідношеннями між пружними параметрами шарів  $G_1 = 2G$  і  $G_2 = G$ . Наприклад, у випадку  $G_1 = G_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$  (однорідний пакет) роздільна здатність оберненої задачі дорівнює нулю (тобто чутливість до шуму дорівнює «нескінченності»). Розподіл навантаження на всій верхній поверхні пакета також підвищує таку чутливість (на практиці навантаження розподілено на обмеженій площі, для аналізу використовується «найінформативніша» ділянка чаші прогину, що прилягає до місця прикладання навантаження (рис. 3.1). У розглянутій модельній задачі навмисно задавалися такі «суворі» умови, щоб чутливість до шуму виявлялася найбільш рельєфно.

Розглянемо питання про вплив рівня регуляризації на якість розв'язку оберненої задачі. Візьмемо модель з невизначеністю типу «некорельований Gaussian» з параметром середньоквадратичного відхилення  $\sigma_D = 0,0005$  для спостережуваних даних і випадкового «шуму», що накладається на них. Невизначеність параметрів також має тип «некорельований Gaussian». Параметр  $\sigma_M$  характеризує рівень «регуляризації». Природно

очікувати, що найкращі результати застосування регуляризації будуть, коли нев'язки за параметрами  $S_m(\mathbf{m})$  та даними  $S_d(\mathbf{m})$  приблизно однакові (за порядком величини). На рис. 3.15 зображено розподіл у відсотковому відношенні значень функцій (3.64) і (3.65) на розв'язку оберненої задачі у сумарній нев'язці (3.63) залежно від величини параметра регуляризації  $\sigma_M$ .

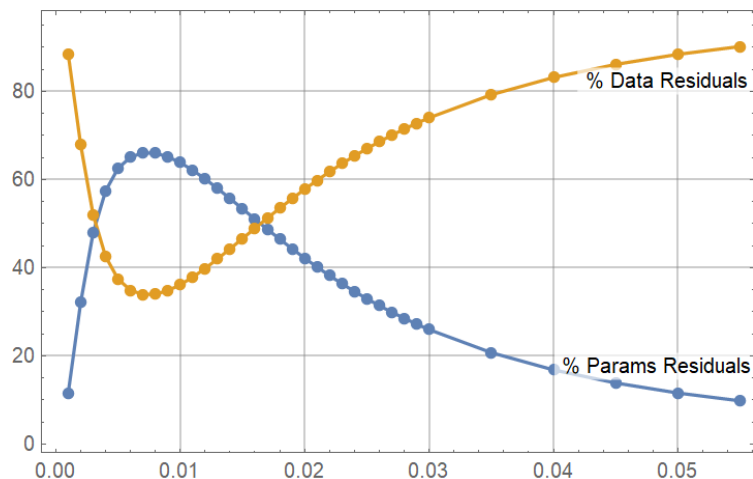


Рис. 3.15. Залежність розподілу (у %) частин  $S_m(\mathbf{m})$  і  $S_d(\mathbf{m})$  у загальній сумі значення функції нев'язки  $S(\mathbf{m})$  від параметра регуляризації  $\sigma_M$

З графіка випливає, що значення параметра перебувають у проміжку  $\sigma_M \in [0,005;0,02]$ . Це саме ті величини, для яких «точні» значення параметрів оберненої задачі могли б бути «вибірковими» з апріорного розподілу з відповідним параметром. Рис. 3.16 свідчить, наскільки важливо правильно «вгадати» параметри апріорного розподілу.

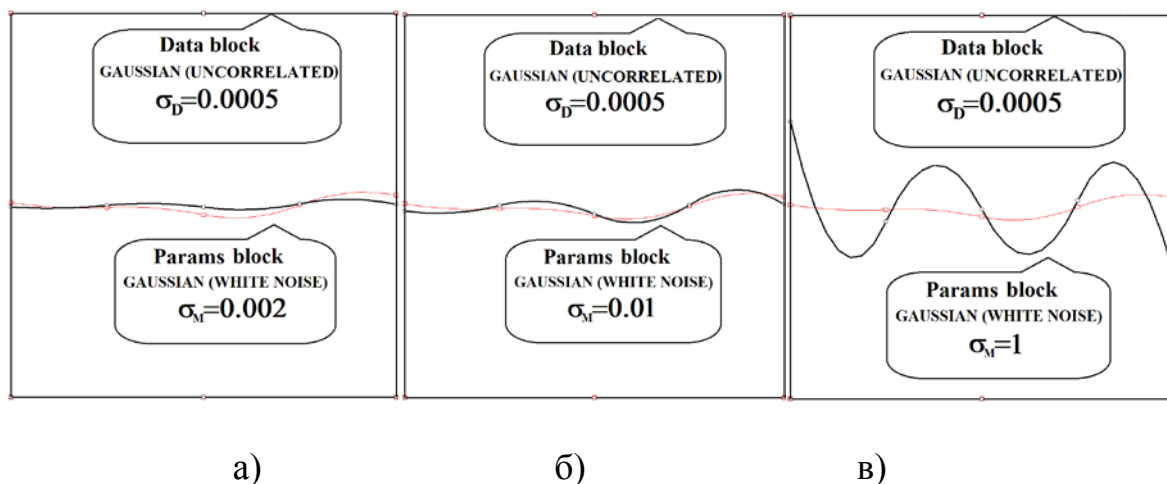


Рис. 3.16. Вплив параметра апріорного розподілу  $\sigma_M$  («параметра регуляризації») на якість розв'язання оберненої задачі: а) надмірна; б) підходяща; в) недостатня регуляризація

Нагадаємо, що як «розв’язок оберненої задачі» розглядалася точка в просторі параметрів, що відповідає максимальній апостеріорній гіпотезі. Для її визначення в розглянутій задачі використовувалися різні методи обчислення мінімуму функцій нев’язки (3.63), (3.66) (квазіньютонівські методи, спряжених градієнтів, змінної метрики тощо). Питання про швидкість збіжності різних методів у рамках запропонованого підходу, як і питання визначення оптимальної оптимізаційної схеми для різних класів задач дуже складні. Вони потребують серйозного додаткового дослідження та виходять за межі даної роботи, головною метою якої є виклад базової теорії блоково-параметричного підходу до розв’язання обернених задач.

На сучасному рівні розвитку методів аналізу обернених задач з теоретичного та практичного погляду також важливі питання прямого та оберненого поширення невизначеностей в аналізованій оберненій задачі [35], [36]. Для їх дослідження запропоновано кілька підходів, найбільш загальним із яких є метод статистичних випробувань, що ґрунтується на використанні для моделювання апостеріорної щільності розподілу різних модифікацій алгоритму Метрополіса–Гастінґса (методи Монте-Карло марківських ланцюгів [37]). За образним висловом А. Тарантоли [14], якщо максимальна апостеріорна гіпотеза – це «фотоінформація» про розв’язок оберненої задачі, то послідовність статистичної вибірки з апостеріорного розподілу – це своєрідна «відеоінформація».

### **3.8. Перспективи подальших досліджень**

Запропонований блоково-параметричний підхід до розв’язання обернених задач у рамках «інформаційно-імовірнісної» концепції був реалізований у задачах визначення невідомих границь розділу шарів пружного шаруватого пакета за заданими переміщеннями деяких точок його верхньої (навантаженої) поверхні. Отримані результати свідчать, що запропонований підхід дуже перспективний для дослідження розв’язків широкого класу обернених задач, у тому числі задач із невідомими параметрами геометрії аналізованої області. В рамках запропонованого підходу вважаються перспективними такі основні напрями досліджень.

1. З’ясувати вплив «внутрішнього шуму» числового методу розв’язання «прямої задачі» на якість розв’язання «оберненої задачі» у межах запропонованого класу моделей. Оскільки основна частина обчислювальної роботи припадає саме на наближене розв’язання «прямої задачі», розумний вибір рівня її дискретизації дасть змогу досягти прийнятного часу розв’язання «оберненої задачі». Таке врахування «внутрішнього шуму» в класі моделей, що розглядається, може бути здійснене (у припущенні нормальності такого «шуму») відповідно до формул (3.43)–(3.46).

2. Дослідити, як змінюється якість розв’язку оберненої задачі залежно від глибини розташування шару пакета. Очевидно, воно погіршуватиметься з глибиною. Має сенс з’ясувати, для якого рівня «шуму даних» роздільна здатність запропонованих моделей буде достатньою для більш-

менш задовільного визначення параметрів глибинних шарів пакета, а також ґрунтової основи.

3. Видається перспективною комбінація запропонованого блоково-параметричного підходу з методом декомпозиції багатовимірного розподілу та подальшої апроксимації отриманих одновимірних розподілів за допомогою спеціальних функцій, який був запропонований у працях [35, 36].

4. Визначити можливості сучасного інструментарію для наближення функцій багатьох змінних (нейронні мережі та інші сурогатні моделі) для оперативної апроксимації розв'язків оберненої задачі. Це питання має особливу актуальність для високошвидкісних сканувальних пристроїв, що дають змогу відразу відображати досліджувані параметри шаруватої основи в процесі руху під час сканування.

### **Список використаних джерел:**

1. Nikolaides A. Highway Engineering. Pavements, Materials and Control of Quality / Nikolaides A. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014.

2. Berkovic G. Optical methods for distance and displacement measurements /G. Berkovic, E. Shafir // Advances in Optics and Photonics. – 2012. – № 4. – P. 441–471.

3. Per Ullidtz. Pavement Analysis. Amsterdam : Elsevier, 1987.

4. Flintsch G. Assessment of Continuous Pavement Deflection Measuring Technologies / G. Flintsch, S. Katicha, J. Bryce and oth/ // SHRP 2 Report S2-R06F-RW-1. Washington, DC : TRB, National Academy of Sciences. – 2013.

5. Morosiuk G. Modelling Road Deterioration and Works Effects. Version 2, HDM-4 / G. Morosiuk, M. Riley, J. B. Odoki // The Highway Development and Management Series, Vol. 6. Paris: World Road Association. – 2004.

6. Zhang Y. A method for evaluating CRCP performance based on edge-loaded FWD test / [Електронний ресурс] / Y. Zhang, J. R. Roesler & Z. Huang // Mater Struct 53, 46 (2020). – Режим доступу : <https://doi.org/10.1617/s11527-020-01481-0>.

7. Park S. Application of Genetic Algorithm and Finite Element Method for backcalculating layer moduli of flexible pavements [Електронний ресурс] / S. Park, H. M. Park & J. Hwang // KSCE J Civ Eng. – 2010. – № 14, – P. 183–190. – Режим доступу : <https://doi.org/10.1007/s12205-010-0183-8>.

8. Evaluation of Resilient Modulus of Subgrade and Base Materials in Indiana and Its Implementation in MEPDG / Ji Richard & Siddiki, Nayyarzia & Nantung, Tommy & Kim, Daehyeon. // The Scientific World Journal. – 2014.

9. Saltan M. Backcalculation of pavement layer moduli and Poisson's ratio using data mining / M. Saltan, S. Terzi, E. U. Küçüksille // Expert Systems With Applications. – 2011. – № 38, – P. 3.

10. Xiaohui R. A  $C^0$ -type zig-zag theory and finite element for laminated composite and sandwich plates with general configurations [Електронний

ресурс] / R. Xiaohui, C. Wanji & W. Zhen // Arch Appl Mech. – 2012. – № 82. – P. 391–406. – Режим доступу : <https://doi.org/10.1007/s00419-011-0563-7>.

11. Saltan M. Backcalculation of Pavement Layer Thickness and Moduli Using Adaptive Neuro-fuzzy Inference System / M. Saltan, S. Terzi. In: Gopalakrishnan K., Ceylan H., Attoh-Okine N. O. (eds) Intelligent and Soft Computing in Infrastructure Systems Engineering. Studies in Computational Intelligence, 2009.

12. Saric A. Artificial Neural Networks Application in the Backcalculation Process of Flexible Pavement Layers Elasticity Modulus. A. Saric, M. Pozder. In: Hadžikadić M., Avdaković S. (eds) Advanced Technologies, Systems, and Applications II. IAT 2017. Lecture Notes in Networks and Systems, 2018.

13. Sadr, M. H. Improving the neural network method for finite element model updating using homogenous distribution of design points [Електронний ресурс] / M. H. Sadr, S. Astaraki, & S. Salehi // Arch Appl Mech – 2007. – № 77. – P. 795–807. – Режим доступу : <https://doi.org/10.1007/s00419-007-0129-x>.

14. Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation / Tarantola A. Philadelphia : SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

15. Hadidi R. Probabilistic Inversion: A New Approach to Inversion Problems in Pavement and Geomechanical Engineering / R. Hadidi, N. Gucunski In: Gopalakrishnan K., Ceylan H., Attoh-Okine N. O. (eds) Intelligent and Soft Computing in Infrastructure Systems Engineering. Studies in Computational Intelligence, 2009.

16. Трофімов О. В. Багатосіткові методи у зворотних задачах для систем із розподіленими параметрами / О. В. Трофімов // Вісник Академії митної служби України. Серія: Технічні науки. – 2014. – № 1 (51). – С. 140–147.

17. Трофімов А. В. Многосеточные итерационные алгоритмы решения граничных задач для упругих и упругопластических слоистых пакетов с криволинейными границами / А. В. Трофімов // Вісник Академії митної служби України. Серія: Технічні науки. 2016. – № 1 (55). – С. 119–137.

18. Трофімов О. В. Аналіз розв'язків обернених задач оцінки структурних і функціональних характеристик дорожніх покриттів [Електронний ресурс] / О. В. Трофімов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – № 31. – С. 100–131. – Режим доступу : <https://doi.org/10.15421/4220009>

19. Trofimov A. V. Inverse problem analysis for nondestructive evaluation of structural characteristics of multilayered foundations [Електронний ресурс] / A. V. Trofimov // Arch Appl Mech 91. – 2021. – P. 1773–1792. – Режим доступу : <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01854-5>

20. Animesh Das. Analysis of pavement structures. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.



21. Trottenberg U. Multigrid / Trottenberg U., Oosterlee C. W., Schuller A. – New York : Academic Press, 2001. – 644 p.
22. Wienands R. Extended local Fourier analysis for multigrid: Optimal smoothing, coarse grid correction, and preconditioning / Wienands R. Ph.D. Thesis, University of Cologne, Cologne, Germany, 2001.
23. Wienands R. Practical Fourier Analysis for multigrid methods / R. Wienands, W. Joppich. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC Press, 2005. – 212 p.
24. Трофімов О. В. Застосування локального аналізу Фур'є для конструювання багатосіткових ітераційних методів розв'язання пружних та пружно-пластичних задач для шаруватих основ / О. В. Трофімов // Вісник Академії митної служби України. Серія: Технічні науки. – 2015. – № 1 (53). – С. 140–155.
25. Писаренко Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. – К. : Наук. думка, 1981. – 496 с.
26. Thompson J. F. Handbook of Grid Generation / Thompson J. F., Soni B., Weatherill N. – New York : CRC Press, 1999. – 1096 p.
27. Трофімов А. В. Многосеточные итерационные алгоритмы построения сеток для упругих и упругопластических слоистых пакетов / О. В. Трофімов, Ю. В. Петрова // Вісник Академії митної служби України. Серія: Технічні науки. – 2015. – № 2 (54). – С. 69–81.
28. Hadamard Jacques. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique / Hadamard Jacques. – Princeton University Bulletin, 1902. – P. 49–52.
29. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
30. Backus G. Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. Philos. Trans. Royal Soc / G. Backus, F. Gilbert. – London, 1970. – P. 123–192.
31. Tarantola A. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least-squares criterion, Rev. Geophys. Space Phys / A. Tarantola B. Valette. – 1982. – P. 219–232.
32. Stefansky W. Rejecting Outliers in Factorial Designs / W. Stefansky // Technometrics. – № 14 (2). – P. 469–479.
33. Ивахненко А. Г. Кибернетические предсказывающие устройства / А. Г. Ивахненко, В. Г. Лапа. – К. : Наук. думка, 1965.
34. Grasa A. A. Econometric Model Selection / A. A. Grasa // Springer Netherlands, 1989.
35. Jie Liua. Forward and inverse structural uncertainty propagations under stochastic variables with arbitrary probability distributions. Comput. Methods Appl [Електронний ресурс] / Jie Liua, Xianghua Menga, Can Xub and oth.

Mech. Engrg. – 2018. – № 342. – P. 287–320. – Режим доступа : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.07.035>.

36. Xianghua Meng. A general frame for uncertainty propagation under multimodally distributed random variables [Электронный ресурс] / Xianghua Meng, Jie Liu, Jie Liu Cao Lixiong et al. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2020. – № 367. – Режим доступа : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113109>.

37. Diaconis Persi. The Markov chain Monte Carlo revolution / Persi Diaconis // Bull. Amer. Math. Soc. – 2009. – № 46 (2). P. 179–205.

38. Non-destructive control data analysis of railroad foundation constructions [Электронный ресурс] : МАТЕС Web Conf / А. Трофимов, А. Кuzmenko, Н. Nesterenko, S. Avramenko, М. Muzykin, N. Mormul, А. Sokhatsky. – 2019. – P. 294. – Режим доступа : <https://doi.org/10.1051/mateconf/201929403012>

## **4. УПРАВЛІННЯ ТРАНСПОРТНО-ЛОГІСТИЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ ПІДПРИЄМСТВ**

### **4.1. Оптимізація транспортно-логістичних процесів промислового підприємства**

Аналіз транспортно-логістичних процесів підприємства на сучасному етапі засвідчив нерівномірність і певні диспропорції їх розвитку. Ця проблема комплексна. Одним з важливих недоліків є неефективний розподіл та спосіб використання наявного автопарку. Автомобільний транспорт бере участь у різноманітних виробничих процесах: працює в цехах промислових підприємств, використовується під час ремонтів та для перевезення матеріалів і обладнання, у навантажувально-розвантажувальних роботах та ін. Це обумовлює актуальність проблеми вдосконалення транспортно-логістичних процесів промислового підприємства.

Аналіз сучасного стану досліджень у сфері транспортної логістики свідчить, що ефективна реалізація функції транспортування неможлива без її комплексного планування разом з іншими логістичними функціями: спільного планування транспортних процесів на різних видах транспорту; забезпечення технологічної єдності транспортно-складського процесу; спільного планування транспортного процесу зі складським та виробничим [1].

На думку спеціалістів, важлива перевага логістичного управління – підвищення рівня саме транспортного обслуговування, що досягається не тільки і не стільки завдяки функціонуванню транспортних підрозділів, скільки в результаті злагодженого виконання комплексу робіт, пов'язаних із постачанням, збутом і перевезенням продукції [2].

Визначенню аспектів, спрямованих на ефективну реалізацію функції транспортування на основі застосування транспортних технологій, пов'язаних з логістичними процедурами вибору, обґрунтуванню необхідності їх застосування та аналізу організації транспортування в логістичних системах присвячено працю [3]. Перспективами їх подальших досліджень є пошук нових, максимально ефективних способів оптимізації транспортного процесу, вдосконалення логістичних систем на основі покращання реалізації функції транспортування, виявлення нових напрямів і підходів до розвитку транспортної логістики [3].

На відміну від старих методів ізольованого управління вантажними перевезеннями, на підприємствах здійснюється перехід до об'єднаного чи скоординованого управління вантажопотоками. Взаємозв'язок і взаємозалежність усіх логістичних елементів, включно із транспортом, обумовили необхідність застосування комплексного підходу до їх подальшого розвитку [4].

Також необхідна адаптація наявних положень до специфічних умов діяльності транспортних структурних підрозділів промислових підприємств [5].

Оперативне планування – завершальна ланка в системі планування діяльності підприємства виступає як засіб виконання довго-, середньо- та короткострокових планів і є одним із важелів оперативного управління виробництвом. Посилення нестабільності сфери функціонування підприємств у динамічних умовах ринкової економіки підвищує роль оперативного планування. Суть оперативного планування полягає в детальній розробці планів підприємств та їх підрозділів (цехів, бригад, ферм, навіть робочих місць) на короткі проміжки часу: окремий виробничий період, місяць, декаду, робочий тиждень, добу, зміну. При цьому опрацювання планів органічно поєднується з розв’язанням питань організації їх виконання та поточного регулювання [6].

Підсумовуючи, можна сказати, що технічна складова організації транспортно-логістичних процесів – важливий аспект розвитку промислового підприємства. Інформаційне забезпечення вражає своїм різноманіттям, проте через швидкий технічний прогрес дуже швидко застаріває, тож існує постійна потреба в дослідженні ефективності нових видів інформаційного забезпечення та їх практичного використання.

Метою дослідження є аналіз сучасного стану транспортно-логістичних процесів на промисловому підприємстві та визначення основних напрямів їх удосконалення. На прикладі Приватного акціонерного товариства «Дніпровський коксохімічний завод» (далі – ПрАТ «ДКХЗ») холдингу Метінвест проаналізувати наявне транспортно-логістичне забезпечення та визначити оптимальні схеми постачання сировини і складські рішення.

Забезпечення раціонального обслуговування транспорту промислових підприємств – складне завдання. Його виконання потребує максимального скорочення часу перебування рухомого складу на підприємстві, його пробігу шляхами загального користування та шляхами промислових підприємств, а також можливої концентрації переробки вантажів, які відповідають потребам технології виробництва, найкращому використанню транспортних засобів та капіталовкладень. Суттєве значення має при цьому чітка взаємодія в роботі зовнішнього транспорту з внутрішнім транспортом підприємств [7].

ПрАТ «ДКХЗ» спеціалізується на виробництві коксу, смоли сульфату амонію і продуктів переробки. Продукція споживається металургійними, енергетичними, хімічними та іншими промисловими компаніями. Це обумовлює необхідність забезпечення надійності та якості процесу перевезень, потребує врахування і задоволення потреб кожного конкретного споживача.

ПрАТ «ДКХЗ» входить до Метінвесту – міжнародної вертикально інтегрованої гірничо-металургійної компанії. У структуру Метінвесту також входять видобувні та металургійні підприємства в Україні, ЄС і США. Вертикальна інтеграція дає змогу управляти всіма етапами: видобутком сировини, виробництвом, поставками і продажами готової продукції [8].

ПрАТ «ДКХЗ» є одним із небагатьох українських підприємств цієї галузі з повним циклом переробки хімічних продуктів коксування. Тут здійснюється підготовка вугільної шихти, виробництво коксу, вловлювання хімічних продуктів коксування, переробка кам'яновугільної смоли.

Підприємство виробляє широкий спектр коксової та хімічної продукції, яка відповідає європейським і міжнародним стандартам. Продукцію підприємства за видами та її структуру подано в табл. 4.1 та зображено на рис. 4.1.

Таблиця 4.1

### Продукція ПрАТ «ДКХЗ» за видами

Продукція ПрАТ «ДКХЗ»	
– кокс доменний; – горішок коксовий; – дрібняк коксовий; – смола кам'яновугільна; – амонію сульфат; – феноляти	– бензол сирий кам'яновугільний; – пек кам'яновугільний; – масла кам'яновугільні; – полімери бензольних відділень

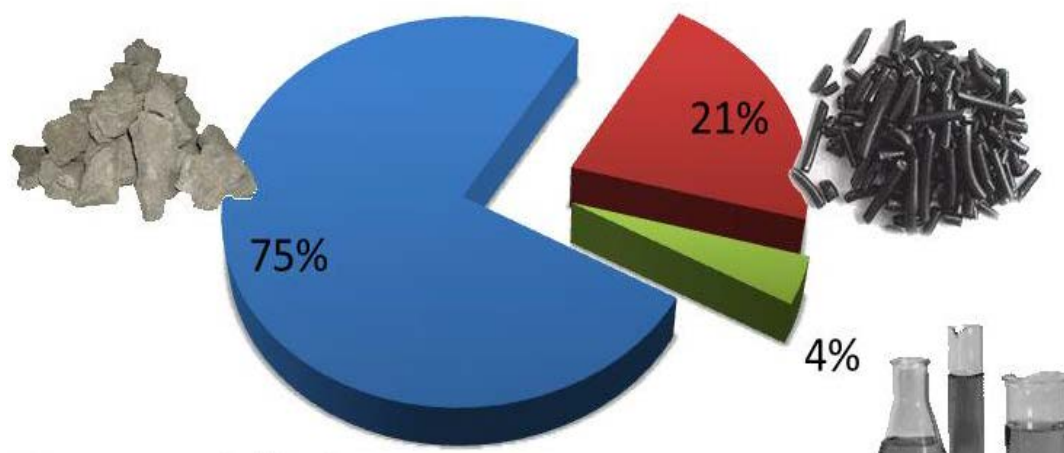


Рис. 4.1. Структура продукції підприємства: 75 % – кокс валовий, 21 % – продукти переробки смоли, 4 % – інші хімічні продукти

Предметом діяльності ПрАТ «ДКХЗ» є виробництво та реалізація коксової, хімічної продукції та хімічних речовин, виробництво і реалізація іншої продукції виробничо-технічного призначення, зовнішньоекономічна діяльність тощо.

До основних цехів, які зайняті різними стадіями виготовлення виробів основного виробництва, тобто виробів, що йдуть на поставку та реалізацію, належать: коксовий цех, вуглепідготовчий цех, цех уловлювання хімічних продуктів коксування та смолопереробний цех.

Допоміжні цехи випускають вироби допоміжного призначення, які споживаються всередині заводу та не йдуть на поставку. До них належать: ремонтно-механічний цех, теплосиловий цех, енергоремонтний цех, цех з ремонту коксових печей, автотранспортний цех, цех залізничного транспорту.

Загальнозаводські обслуговуючі господарства організуються для обслуговування основних і допоміжних цехів. До них належать складське та енергетичне господарства, лабораторії.

Для ефективного управління процесом виробництва на підприємстві розроблена оптимальна організаційна структура управління, основною відмітною рисою якої є встановлення підпорядкованості за центрами функціональної відповідальності. Для централізації ремонтних служб, єдиного планування та організації ремонтів, забезпечення його безаварійної роботи, підвищення якості технічного обслуговування і зниження витрат підприємства на його проведення у 2010 р. створено сервісний центр, що інтегрує у своїй структурі механічну та електричну служби [9].

Аналіз системи діяльності автотранспортного цеху свідчить про його вагомий роль у господарській діяльності. Він здійснює перевезення всередині цехів і між ними, забезпечує зв'язок цехів і складів, а також зв'язок з магістральним транспортом під час вивезення-завезення сировини і продукції. Від чіткості та надійності його роботи багато в чому залежить ритм підприємства.

Управління автотранспортним цехом у сучасних умовах потребує добре спланованої організації, що дає змогу приймати оптимальні рішення в умовах нестабільної економічної ситуації, характерної для перехідного періоду на заводі. Одне з головних завдань полягає в тому, щоб домогтися ритмічної роботи всіх ланок управління, високої оперативності й чіткості в аналізі поточної інформації, подальшій підготовці, прийнятті та реалізації управлінських рішень [10].

Основні проблеми виходять зі специфіки функціонування цеху та організації роботи всього заводу. Серед них – застарілі методи контролю та аналізу роботи; недосконале планування та, як наслідок, задоволення заявок не в повному обсязі; необхідність запровадження заходів економії витрат паливно-мастильних матеріалів; утримання специфічних і сезонних видів транспорту. Розв'язання даних проблем має бути комплексне.

Логістична система ставить до своєї мережі такі вимоги:

– швидке і надійне, переважно автоматизоване збирання інформації та даних про транспортні засоби і виробників товарної продукції;

– структурування внутрішньої інформаційної системи прийняття рішень, що у кожен момент містить актуальну інформацію про хід транспортних процесів.

Також нині поширюються технології безпаперового обміну інформацією [11].

Загальними принципами планування є повне задоволення транспортних потреб структурних підрозділів підприємства, ефективно використання технічних засобів та різних видів ресурсів, розгляд роботи всіх видів транспорту в комплексі.

У плануванні роботи транспорту найскладнішою ділянкою є оперативне планування. Його функції полягають у встановленні погоджених обсягів роботи транспорту та їх підрозділів на найближчий час, маршрутизації перевезень, організації узгодженої роботи транспортного та структурних підрозділів підприємства.

Оскільки якість планування підвищується разом зі ростанням повноти інформації та швидкості обробки даних, усі підрозділи підприємства мають оснащуватися сучасним програмним забезпеченням, яке утворить єдину мережу, що, безсумнівно, значно спростить процес прийому й обробки як вихідних, так і вхідних даних.

Для безперервного виробництва на підприємстві необхідне постійне оперативне оновлення існуючих рішень щодо транспортно-логістичного забезпечення та складських рішень.

Тож визначимо оптимальні схеми постачання сировини для забезпечення функціонування смолопереробного цеху. Від якості сировини залежать показники готової продукції. Від того, яку сировину та в яких пропорціях додати, залежить виконання плану.

Для безперервної роботи смолопереробного цеху необхідно мати відповідні складські ємності для зберігання вихідної сировини.

У загальному вигляді постановка задачі така. Постачання сировини ведеться від  $k$  підприємств з використанням наявної транспортної мережі, для якої відомі відстані між зв'язними точками (об'єктами мережі) окремих ділянок шляхів можливого постачання.

Загальна схема виробничого процесу зображена на рис. 4.2.

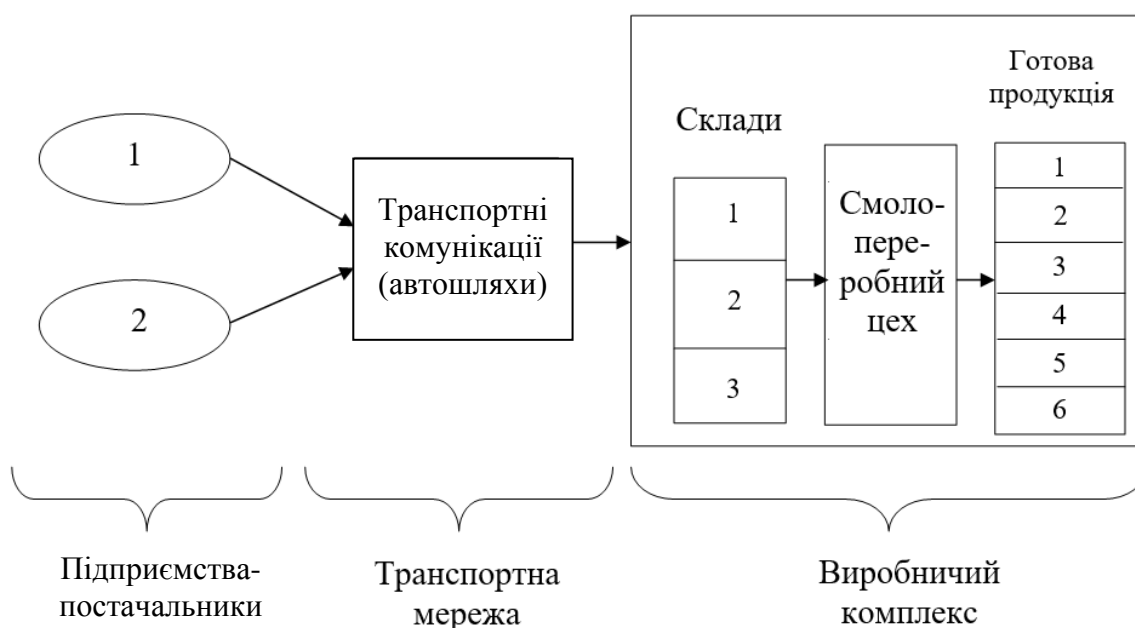


Рис. 4.2. Загальна схема виробничого процесу

Для забезпечення безперебійного виробництва продукції смолопереробного цеху необхідно розрахувати складські ємності та обрати схему постачання сировини з інших підприємств.

Слід визначити ємність складів сировини згідно з планом виробництва та мінімальною собівартістю виробництва хімічних речовин з обмеженнями на витрати електроенергії  $A$  кВт/рік та пару  $V$  Гкал.

Питомі норми витрат сировини, електроенергії та пару, а також собівартість переробки 1 т смоли необхідної якості беремо з внутрішніх даних підприємства.

Введемо такі умовні позначення:

$X_j$  – кількість кінцевої продукції ( $j = 1, n$ );

$b_i$  – кількість складів для сировини ( $j = 1, m$ );

$A$  – задані обсяги електроенергії, кВт/рік;

$V$  – задані обсяги пару, Гкал/рік;

$Q$  – план переробки смоли кам'яновугільної, т/рік;

$a_j$  – питомі норми витрат електроенергії, кВт/т;

$V_j$  – питомі норми витрат пару Гкал/т;

$q_{ij}$  – питомі норми витрат сировини, т/т;

$C_j$  – собівартість смоли кам'яновугільної, грн/т;

$C_{ki}$  – питомі транспортні витрати на один кілометр, грн/км;

$x_{ki}$  – обсяг перевезень з  $k$ -го підприємства до  $i$ -го складу, т.

Алгоритм розв'язання задач для вирішення даної виробничої ситуації зображено на рис. 4.3.

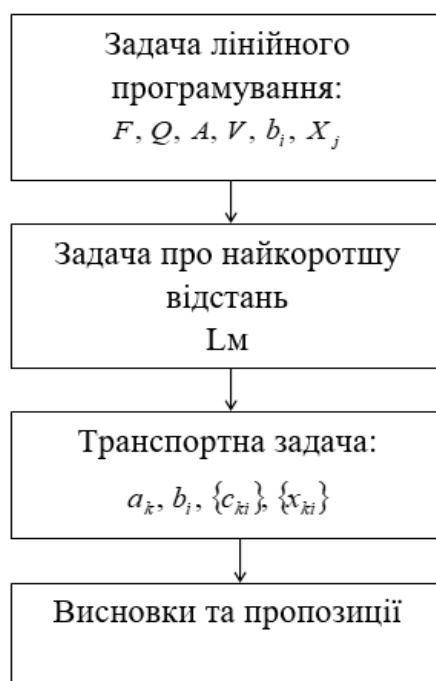


Рис. 4.3. Алгоритм розв'язання задач



Згідно з рис. 4.3 необхідно розв'язати такі задачі.

1. Задача лінійного програмування з урахуванням обмеження:

$$F = \sum_{j=1}^n e_j \cdot x_j \rightarrow \min . \quad (4.1)$$

2. Визначення кількості планів виробництва за формулою:

$$\sum_{j=1}^n x_j = Q . \quad (4.2)$$

3. Оцінка витрат електроенергії за формулою:

$$\sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j \leq A . \quad (4.3)$$

4. Визначення витрати пару за формулою:

$$\sum_{j=1}^n V_j \cdot x_j \leq V . \quad (4.4)$$

Витрати  $i$ -ї сировини визначаємо за формулою:

$$\sum_{j=1}^n q_y \cdot x_j \leq b_i . \quad (4.5)$$

*Транспортна задача.*

Цільова функція визначається за формулою:

$$F = \sum_{k=1}^k \sum_{i=1}^m c_{ki} \cdot x_{ki} \rightarrow \min . \quad (4.6)$$

Обсяг перевезення з  $k$ -го підприємства до  $i$ -го складу розраховується через потужності кожного постачальника за формулою:

$$\sum_{i=1}^m x_{ki} = a_k, (i = \overline{1, m}) . \quad (4.7)$$

Обсяг перевезення з  $k$ -го підприємства до  $i$ -го складу визначається через потреби складів у сировині за формулою:

$$\sum_{k=1}^k x_{ki} = b_k, (k = \overline{1, k}) . \quad (4.8)$$

Задачі виробництва розв'язуються в п'ять етапів.

*Етап 1.* Розв'язується задача лінійного програмування, але без обмежень на сировину, тобто за формулою:

$$\sum_{j=1}^n q_y \cdot x_j \leq b_i. \quad (4.9)$$

Згідно з обмеженням на сировину та відомим значенням  $x_j$  після розв'язання задачі лінійного програмування обчислюються величини  $b_i$  (витрати на сировину) за формулою:

$$b_i = \sum_{j=1}^n q_y \cdot x_j. \quad (4.10)$$

Ємності складів сировини приймаються  $b_i$ . Загальна собівартість дорівнює  $F$ .

*Етап 2.* Потужності кожного підприємства-постачальника оцінюються за формулою:

$$a_k = \sum_{i=1}^n b_i. \quad (4.11)$$

Розв'язується транспортна задача для  $\{a_k\}$ ,  $\{b_i\}$ , та  $\|C_{ki}\|$ , вводячи фіктивний склад. Для одержаного варіанта постачання (прив'язка складів до постачальників  $\{x_{ki}\}$ , ( $k = \overline{1, k}$ ) – постачальники, ( $i = \overline{1, m}$ ) – склади) необхідно обрати найбільш вигідні маршрути постачання сировини.

*Етап 3.* Згідно з транспортною мережею визначаються найкоротші шляхи від постачальників до складів для перевезення обсягів сировини  $\{x_{ki}\}$ .

У результаті розв'язання цієї задачі визначаються найкоротші відстані  $\{L_{ki}\}$ . Потім розраховуються транспортні витрати на 1 км:  $C_{ki} = L_{ki} \cdot C_{ki}$ .

$$F_{TP} = \sum_{k=1}^k \sum_{i=1}^m C_{ki} \cdot x_{ki}. \quad (4.12)$$

*Етап 4.* Обчислюється загальна сума витрат  $F_0 = F + F_{TP}$  та складається схема виробництва.

*Етап 5.* Пропонуються висновки та пропозиції щодо поліпшення розв'язку. Прийняття остаточного варіанта.

Для розв'язання задачі маємо такі вихідні дані: план виробництва  $Q = 10\ 610$  т/рік; електроенергія:  $A = 29\ 010$  кВт/рік; пар:  $V = 4500$  Гкал/рік, ціна ресурсів зазначена в табл. 4.2.

## Ціна ресурсів

Ресурс	Ціна, грн
Електроенергія (грн/кВт)	1,75
Пар (грн/Гкал)	760
Сировина I (грн/т)	105
Сировина II (грн/т)	110
Сировина III (грн/т)	103

Питомі норми витрат подано в табл. 4.3.

Вартісні коефіцієнти перевезення 1 т сировини на 1 км від двох підприємств до трьох складських приміщень (у грн) подаються у вигляді матриці:

$$C = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Таблиця 4.3

## Питомі норми на тонну переробки смоли кам'яновугільної

Показники, ресурси	Технологія переробки		
	I	II	III
Електроенергія (кВт/т)	3,30	1,80	2,00
Пар (Гкал/т)	0,40	0,46	0,50
Сировина I (т/т)	0,40	0,30	0,17
Сировина II (т/т)	0,45	0,30	0,50
Сировина III (т/т)	0,15	0,40	0,32
Собівартість (грн/т)	416,7	458,5	490,4

Мережу автомобільних шляхів постачання сировини зображено на рис. 4.4.

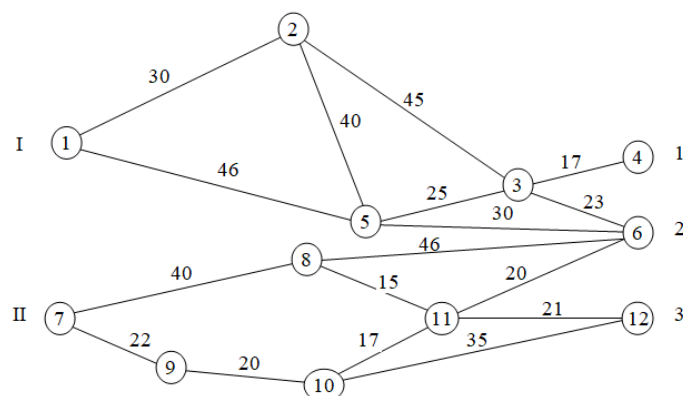


Рис. 4.4. Мережа автомобільних шляхів постачання сировини

Розв'язання задачі виконуємо згідно з алгоритмом.

1. Складаємо математичну модель лінійного програмування, яка розв'язується симплекс-методом:

$$F = 416,7 \cdot x_1 + 458,5 \cdot x_2 + 490,4 \cdot x_3 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10610,$$

$$3,3 \cdot x_1 + 1,8 \cdot x_2 + 2,0 \cdot x_3 \leq 29010,$$

$$0,4 \cdot x_1 + 0,46 \cdot x_2 + 0,5 \cdot x_3 \leq 4500.$$

Розв'язання симплекс-методом визначаємо за допомогою надбудови Microsoft Excel «Пошук рішення», що зображено на рис. 4.5.

	x1	x2	x3
60	6608	4002	0
61	3,30	1,80	2,00
62	0,40	0,46	0,50
63	416,73	458,45	490,37
65	4588435,70		min
66	10610,00	>=	10610,00
67	29010,00	<=	29010,00
68	4484,12	<=	4500,00

Рис. 4.5. Визначення розв'язку задачі лінійного програмування

Розв'язування:  $F = 45\,884\,35,7$  грн,  $x_1 = 6608$  т,  $x_2 = 4002$  т,  $x_3 = 0$  т.

2. Визначаємо обмеження на сировину:

$$0,40 \cdot x_1 + 0,30 \cdot x_2 + 0,17 \cdot x_3 \leq b_1,$$

$$0,45 \cdot x_1 + 0,30 \cdot x_2 + 0,50 \cdot x_3 \leq b_2,$$

$$0,15 \cdot x_1 + 0,40 \cdot x_2 + 0,32 \cdot x_3 \leq b_3.$$

Установлюємо потребу в кожному виді сировини:

$$b_1 = 0,40 \cdot 6608 + 0,30 \cdot 4002 + 0,17 \cdot 0 = 3843,8\text{т},$$

$$b_2 = 0,45 \cdot 6608 + 0,30 \cdot 4002 + 0,50 \cdot 0 = 4174,2\text{т},$$

$$b_3 = 0,15 \cdot 6608 + 0,40 \cdot 4002 + 0,32 \cdot 0 = 2592,0\text{т}.$$

3. Розв'язуємо транспортну задачу, в якій потреба від кожного підприємства-постачальника:

$$a = a_1 = a_2 = b_1 + b_2 + b_3 = 3843,8 + 4174,2 + 2592,0 = 10610 \text{ т}.$$

Задача розв'язується з фіктивним складом  $b_4 = 10\,610$  т, для якого  $C_y = 0$ .

Оптимальне розв'язання транспортної задачі визначаємо за допомогою надбудови Microsoft Excel «Пошук рішення», що зображено на рис. 4.6.

Транспортна задача						
Потужності кожного постачальника	Ємності складів сировини					
	1	2	3	4	$a_x$	
	I	2	2	3	0	10610,0
II	4	1	2	0	10610,0	
$b_t$	3843,8	4174,2	2592,0	10610,0		

Рішення задачі					
	1	2	3	4	$a_x$
I	3843,8	0,0	0,0	6766,2	10610,0
II	0,0	4174,2	2592,0	3843,8	10610,0
$b_t$	3843,8	4174,2	2592,0	10610,0	
F	17045,8	min			

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До:  Максимум  Минимум  Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

- \$C\$56 = \$D\$50
- \$D\$56 = \$E\$50
- \$E\$56 = \$F\$50
- \$F\$56 = \$G\$50
- \$H\$48 = \$G\$54
- \$H\$49 = \$G\$55

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ

Метод решения  
Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Найти решение

Рис. 4.6. Визначення оптимального розв'язку транспортної задачі  
Оптимальний розв'язок транспортної задачі наведено в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

### Оптимальне розв'язування транспортної задачі

	Склад 1, т	Склад 2, т	Склад 3, т	Склад 4, т	Усього $a_x$ , т
Постачальник I, т	3843,8	0	0	6766,2	10 610,0
Постачальник II, т	0	4174,2	2592,0	3843,8	10 610,0
Усього $b_t$ , т	3843,8	4174,2	2592,0	10 610,0	

Згідно з оптимальним розв'язком будемо схему постачання сировини від підприємств до складів (рис. 4.7).

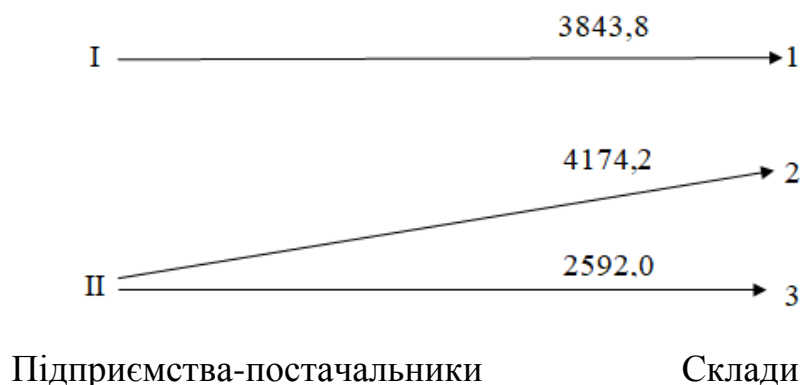


Рис. 4.7. Схема постачання сировини

4. Для розрахунку транспортних витрат за постачання сировини треба визначити найкоротші шляхи транспортування вантажу.

Згідно з оптимальною прив'язкою постачальників до складів визначаємо найкоротші шляхи.

1) Для перевезення з першого підприємства до першого складу необхідно розрахувати загальну відстань  $L_{1-4}$ . Варіанти шляху такі:

$$L_{1-4} = L_{1-2} + L_{2-3} + L_{3-4} = 30 + 45 + 17 = 92, \text{ км};$$

$$L_{1-4} = L_{1-2} + L_{2-5} + L_{5-4} + L_{4-5} = 30 + 40 + 25 + 17 = 112, \text{ км};$$

$$L_{1-4} = L_{1-5} + L_{5-3} + L_{3-4} = 46 + 25 + 17 = 85, \text{ км};$$

$$L_{1-4} = L_{1-5} + L_{5-2} + L_{2-3} + L_{3-4} = 46 + 40 + 45 + 17 = 148, \text{ км}.$$

2) Для перевезення з другого підприємства до другого складу потрібно обчислити загальну відстань  $L_{7-6}$ . Розглянемо всі варіанти:

$$L_{7-6} = L_{7-8} + L_{8-6} = 40 + 46 = 86, \text{ км};$$

$$L_{7-6} = L_{7-9} + L_{9-10} + L_{10-11} + L_{11-6} = 22 + 20 + 17 + 20 = 79, \text{ км};$$

$$L_{7-6} = L_{7-8} + L_{8-11} + L_{11-6} = 40 + 15 + 20 = 75, \text{ км};$$

$$L_{7-6} = L_{7-9} + L_{9-10} + L_{10-11} + L_{11-8} + L_{8-6} = 22 + 20 + 17 + 15 + 46 = 120 \text{ км}.$$

3) Для перевезення з другого підприємства до третього складу необхідно визначити загальну відстань  $L_{7-12}$ . Можливі варіанти:

$$L_{7-12} = L_{7-9} + L_{9-10} + L_{10-11} + L_{11-12} = 22 + 20 + 17 + 21 = 80, \text{ км};$$

$$L_{7-12} = L_{7-9} + L_{9-10} + L_{10-12} = 22 + 20 + 35 = 77, \text{ км};$$

$$L_{7-12} = L_{7-8} + L_{8-11} + L_{11-12} = 40 + 15 + 21 = 76, \text{ км}.$$

Оптимальні маршрути зображено на рис. 4.8 (виділено жирними лініями).

Маємо такі результати:

1-й постачальник  $\rightarrow$  1-й склад:  $L_{1-4}=85$  км,

2-й постачальник  $\rightarrow$  2-й склад:  $L_{7-6}=75$  км,

2-й постачальний  $\rightarrow$  3-й склад:  $L_{7-12}=76$  км.

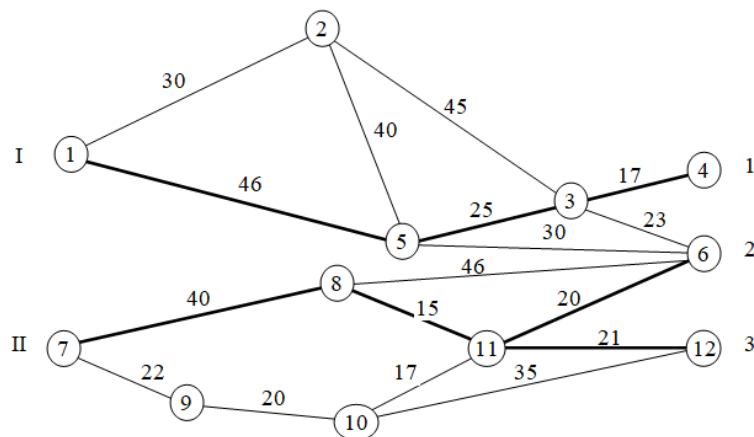


Рис. 4.8. Найкоротші маршрути доставки сировини

Таким чином, транспортні витрати на перевезення 1 т сировини найкоротшими шляхами дорівнюють:

$$C_{11} = 2 \cdot 85 = 170, \text{ грн}; C_{22} = 1 \cdot 75 = 75, \text{ грн}; C_{13} = 2 \cdot 76 = 152, \text{ грн};$$

Загальні транспортні витрати:

$$F_{TP} = 170 \cdot 3843,8 + 75 \cdot 4174,2 + 152 \cdot 2592,0 = 1360495,0 \text{ грн},$$

$$F_0 = F + F_{TP} = 4588435,7 + 1360495,0 = 5948930,7 \text{ грн}.$$

Висновки та пропозиції:

1. Складські приміщення повинні мати таку ємність:
  - перший склад – не менше 3843,8 т,
  - другий склад – не менше 4174,2 т,
  - третій склад – не менше 2592,0 т.
2. Для виконання плану виробництва обсягом 10 610 т/рік хімікатів з мінімальною собівартістю треба виробляти тільки перший та другий вид кінцевої продукції обсягами відповідно 6608 т/рік та 4002 т/рік.
3. Перевиконання плану виробництва не передбачається за обраною цільовою функцією.
4. Під час виробництва кінцевої продукції є профіцит електроенергії, тому що вона повністю не витрачається за планом 29 010 кВт/рік:

$$3,3 \cdot 6608 + 1,8 \cdot 4002 + 2 \cdot 0 = 13814,9 \text{ кВт/рік},$$

а забезпечення паром повністю задовільняє потреби без залишків за планом 4500 ГКал/рік:

$$0,4 \cdot 6608 + 0,46 \cdot 4002 + 0,4 \cdot 0 = 4484,1 \text{ ГКал/рік}.$$

5. План виробництва задовольняється повністю, проте зайву електроенергію можна передавати до інших цехів.

6. Визначено оптимальні маршрути перевезення, якими рекомендується користуватись надалі.

**Висновки і перспективи подальших досліджень у даному напрямі.** Важливим аспектом розвитку промислового підприємства є організація ефективних транспортно-логістичних процесів. На прикладі ПрАТ «ДКХЗ» холдингу Метінвест проведено аналіз наявного транспортно-логістичного забезпечення та визначено оптимальні схеми постачання сировини і складські рішення. Розв'язано задачу пошуку оптимальних схем постачання сировини для забезпечення виробництва, за якою визначено

ємності для зберігання вихідної сировини та оптимальні схеми доставки смоли кам'яновугільної.

Результати дослідження свідчать про необхідність постійного оперативного оновлення існуючих рішень та можуть бути використані для вдосконалення транспортно-логістичної складової процесів промислових підприємств.

#### **4.2. Розробка моделі управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємств**

Важлива умова успішного розвитку сучасної економіки – виробництво конкурентних продукції та послуг, що неможливо без підвищення стандартів якості. У зв'язку з цим останнім часом активно розвиваються системи, методи та інструменти менеджменту якості, розширюється сфера їх застосування. В умовах швидкого зростання на ринку кількості логістичних підприємств проблема якісного обслуговування клієнтів набуває особливої актуальності.

Визначення закономірностей ефективного функціонування логістичного підприємства ґрунтується на дослідженні великої кількості факторів і потребує застосування методів управління якістю процесів за кількісними ознаками. Використання статистичного моделювання та оптимізація ознак якості допомагає як виявляти закономірності та оцінювати рівень стабільності процесів на основі вихідної статистичної інформації, так і безпосередньо управляти якістю транспортно-логістичних процесів підприємства.

Аналіз світового досвіду впровадження систем менеджменту якості свідчить, що в сучасних умовах прискорення науково-технічного прогресу, глобалізації економіки, загострення конкуренції виробників актуальність проблем якості постійно зростає.

Аналізу застосування статистичних методів у процесі управління якістю присвячено [12]. Методологічні принципи статистичного моделювання та прогнозування соціально-економічних явищ процесів, аналітичні можливості та межі застосування конкретних моделей наведено в праці [13].

Обґрунтування сучасних концепцій менеджменту якості, питання ефективності впровадження систем управління якістю розглянуто в [14], аналіз методів оптимізації витрат на забезпечення якості продукції, особливостей сертифікації послуг, що впливає на якість і конкурентоспроможність промислового підприємства висвітлено в підручнику [15]. Теоретичні, методичні та практичні аспекти застосування статистичних методів регулювання технологічних процесів на підприємстві розглянуто в дослідженні [16].

Новітні системи менеджменту якості й методи підвищення ефективності організацій на основі покращання якості, такі як система продуктивного обслуговування обладнання за участю всього персоналу (TPM), система економного виробництва (Lean Production), методологія “Шість сигм”, бенчмаркінг, реінжиніринг, реструктуризація підприємства, економіка якості, проаналізовано в [17].



Управління ланцюгом поставок являє собою комплексний і системний підхід, який потребує одночасного розгляду й обліку багатьох операцій з постачання та збуту. У [18, 19] розглянуто етапи управління ланцюгами постачання й можливості підвищення його ефективності та якості.

Різновиди управлінських інновацій, що можуть бути використані в різних підсистемах підприємства залежно від необхідності розв'язання порушених проблем та напряму інноваційного розвитку підприємства, досліджено в [20]. Застосування стратегічного менеджменту на основі принципів синергії, об'єктно-цільового та процесного підходів, використання яких забезпечує стійкі конкурентні переваги підприємства на ринку продукції, подано в [21].

Аналіз сучасних концепцій, методів та стратегій удосконалення управління якістю процесів свідчить про актуальність даного напряму. Проте покращання конкурентоспроможності та здатності динамічно реагувати на вимоги ринку, ефективне використання внутрішніх ресурсів транспортно-логістичних компаній неможливе без розвитку і впровадження процесного підходу в діяльності організації та застосування методів для статистичного управління якістю поставок.

Мета дослідження – вдосконалення якості транспортно-логістичних процесів на основі розвитку процесного підходу в діяльності організації та застосування методів для статистичного управління якістю процесів. Для досягнення мети необхідно виконати такі завдання:

- сформулювати модель для обґрунтування ефективних заходів управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємства на основі застосування процесного підходу та статистичного управління якістю поставок;
- запропонувати алгоритм виконання завдань управління показниками якості транспортно-логістичних процесів підприємства;
- провести моделювання із застосуванням контрольних карт для виявлення нестабільних транспортно-логістичних процесів підприємства та запропонувати шляхи їх стабілізації.

Якість постачання продукції від виробників до торговельних фірм, а від них через дилерів і філії кінцевому споживачеві має особливо велике значення для підтримання іміджу торговельної компанії та задоволення вимог і потреб споживачів. Потреба організації в побудові ефективного ланцюга постачання обумовлена необхідністю доставки товару кінцевому споживачеві краще, швидше й дешевше від конкурентів [18].

### ***Формування моделі управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємства***

Пропонується двофазна модель для обґрунтування ефективних заходів управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємства на основі застосування процесного підходу та статистичного управління якістю поставок.

*Перша фаза* включає впровадження й розвиток процесного підходу в транспортно-логістичній компанії.

Для підвищення рівня зрілості підприємств, що характеризує керованість і передбачуваність процесів, керівники впроваджують системи автоматизації діяльності компанії (бізнес-процесів, документообігу тощо). Шкала зрілості процесів визначає п'ять градацій (рис. 4.9) [22]. Щодо рівня зрілості бізнес-процесів, то навіть повний опис і регламентація всіх процесів дає змогу компанії досягти максимум третього рівня зрілості [22–24].

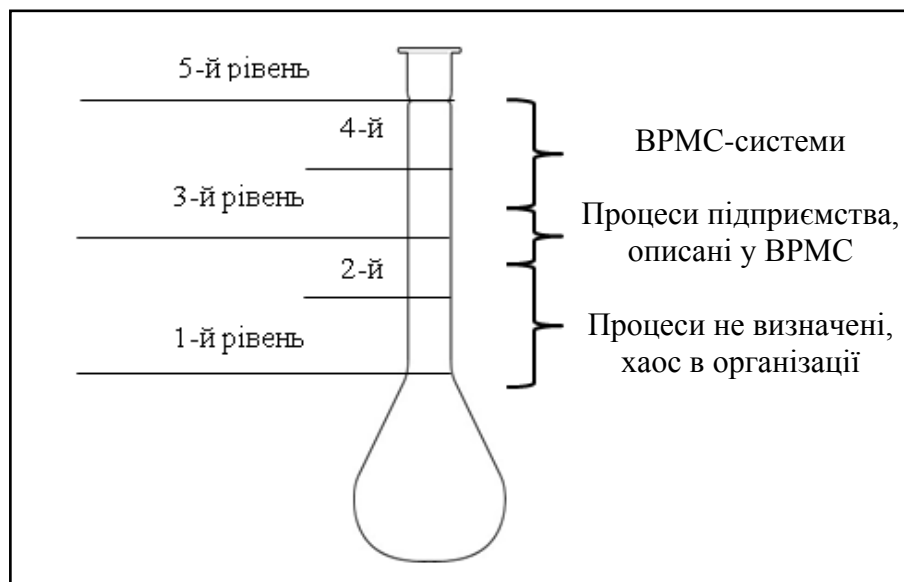


Рис. 4.9. Шкала рівня зрілості підприємства

Четвертий рівень передбачає, що на практиці процеси здійснюються в запропонованих рамках для досягнення певних цілей. Результати процесів збираються й аналізуються, що дає змогу зробити кількісну оцінку можливостей процесу, його прогнозування та управління продуктивністю.

Для досягнення п'ятого рівня процеси мають бути повністю визначені, їх цілі та завдання синхронізовані із загальними стратегічними цілями бізнесу, тобто вони стають невід'ємною частиною повсякденної діяльності кожного учасника процесу. Самостійне безперервне вдосконалення стає частиною процесів [22].

Ефективним засобом автоматизації бізнес-процесів є ВРМС-система, яка дає змогу перейти від інструкцій до автоматичного виконання і контролю процесів, допомагає керувати ефективністю діяльності компанії. Механізм постійного поліпшення процесів уможливорює розвиток моделі управління в компанії. ВРМС-система дає змогу супроводжувати бізнес на всіх етапах становлення та вдосконалення процесного підходу в управлінні компанією. Але тільки за використання повного циклу Демінга «Plan-Do-Check-Act» (PDCA) в діяльності компанії слід очікувати розвитку та вдосконалення бізнесу, підвищення конкурентоздатності й управління «майбутнім» цієї компанії. Застосування можливостей ВРМС-системи дає змогу не

лише збирати і впорядковувати статистичну інформацію за наявних бізнес-процесів, але й контролювати їх чітке виконання [22, 23].

*Друга фаза* включає статистичне управління якістю транспортно-логістичних процесів і має два етапи: оцінка параметрів та їх моніторинг [12].

Метою першого етапу є отримання інформації про варіацію процесу, досягнення ним стану статистичної стабільності та одержання оцінок параметрів процесу в цьому стані.

Мета другого етапу – підтримка процесу в стабільному стані.

Виконання завдання статистичного управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємства пропонуємо здійснювати за таким алгоритмом.

Крок 1. Визначення ключових бізнес-процесів для забезпечення успішного розвитку компанії.

Крок 2. Виявлення факторів, що впливають на якість транспортно-логістичних процесів та їх систематизація.

Крок 3. Ідентифікація основних проблем, існування яких стримує розвиток компанії.

Зручним інструментом для виявлення ключових взаємозв'язків між різними факторами в технічній, організаційній, технологічній, економічній, соціальній та інших сферах є причинно-наслідкова діаграма (діаграма Ісікави), яка одержала назву «риб'ячий кістяк», або «риб'яча кістка» [25]. Діаграма має структуру у вигляді «ялинки», в якій проблемна характеристика якості є стовбуром, а основні фактори (матеріали, методи, персонал, технічні засоби), які спричиняють проблему, подані у вигляді стрілок, розташованих під нахилом від стовбура. Діаграма Ісікави допомагає виявити і систематизувати різні фактори й умови, що впливають на досліджувану проблему, краще зрозуміти досліджуваний процес. Аналіз сприяє визначенню головних чинників негативного впливу та формуванню запобіжних заходів для усунення наявних проблем.

Крок 4. Аналіз та обґрунтування застосування методів управління показниками якості транспортно-логістичних процесів підприємства на основі кількісних оцінок.

Забезпечення відповідного рівня якості товарів або послуг потребує впровадження в діяльність підприємств статистичного управління процесами. Статистичне управління процесами – методологія постійного вдосконалення процесів, яка ґрунтується на статистичному оцінюванні й теорії варіабельності і використовує відповідний статистичний інструментарій збирання і обробки, оцінки та аналізу даних [26].

Ефективними методами контролю якості різноманітних процесів вважаються контрольні карти Шухарта. Дані для побудови карт отримують із процесу вибірково через приблизно рівні інтервали, які можуть бути задані або за часом (наприклад, щогодини), або за кількістю продукції (кожна партія). Карта Шухарта – це графік значень певних характеристик підгруп залежно від їхніх номерів (рис. 4.10). Центральна лінія (CL) відповідає ета-

лонному значенню характеристики [27]. Для оцінки перебування процесу в статистично керованому стані еталонним зазвичай виступає середнє арифметичне розглянутих даних. Карта Шухарта має дві статистичні контрольні межові лінії, що розташовані по обидва боки від центральної лінії (CL) і називаються верхньою контрольною межею (UCL) і нижньою контрольною межею (LCL).

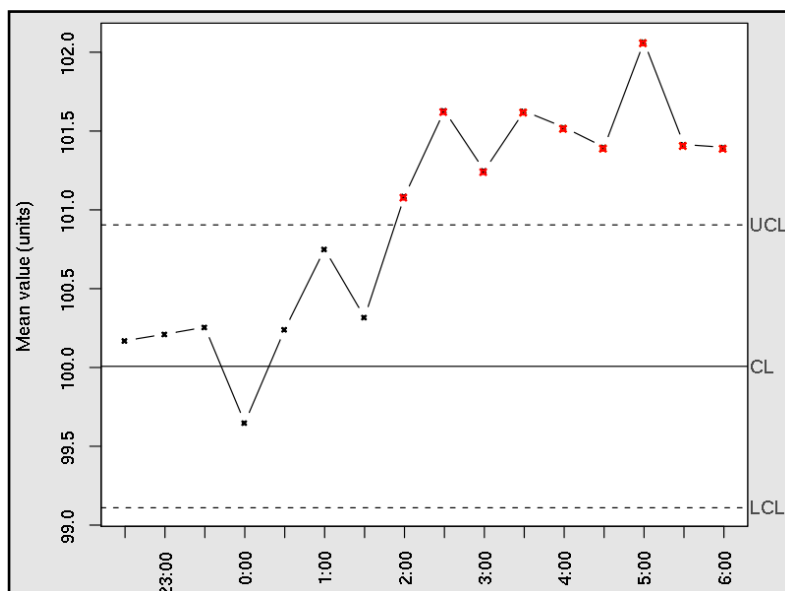


Рис. 4.10. Контрольні карти Шухарта

Контрольні лінії на карті Шухарта розміщено на відстані  $3\sigma$  від центральної лінії, де  $\sigma$  – генеральне стандартне відхилення. Межі  $\pm 3\sigma$  вказують, що близько 99,7 % значень характеристики підгруп потраплять у ці межі за умови, що процес перебуває в статистично керованому стані. Тобто є ризик, який дорівнює приблизно 0,3 %, що нанесена точка опиниться поза контрольними межами (у разі стабільного процесу). Якщо процес статистично керований, контрольні карти реалізують метод безперервної статистичної перевірки нульової гіпотези про те, що процес не змінився й залишається стабільним. Коли значення параметра виходить за будь-яку з контрольних меж або серія значень виявляє незвичайні структури, стан статистичної керованості піддається сумніву. В цьому випадку потрібно дослідити й виявити невідомі (особливі) причини, а процес можна зупинити або скорегувати. Для виявлення причини відхилення досліджують вплив якості вихідного матеріалу або деталей, методів, операцій, умов проведення технологічних операцій, обладнання. Щойно особливі причини знайдено й вилучено, процес знову готовий до продовження роботи [28]. У виробничій практиці застосовуються різні види контрольних карт. Наприклад, для контролю за кількісною ознакою показників якості процесів використовують карту середніх арифметичних і розмахів (X–R).

Крок 5. Застосування механізму покращання процесів, який впливає на розвиток моделі управління підприємством на основі повного циклу Демінга (PDCA).

Призначенням контрольних карт є подання сигналів про невідповідності, до яких можна зарахувати зсуви в рівні процесу. Спроможність контрольної карти віднаходити зміни в рівні якості визначається її операційною характеристикою [29, 30].

Цикл удосконалення якості на основі цілеспрямованого впливу на параметри процесу зображено на рис. 4.11 [12]. Зі зміною параметрів процесу впевненість у результаті змін через здійснений вплив, а не в результаті випадкової варіації через дію невідомих факторів маємо за наявності стану статистичної стабільності.

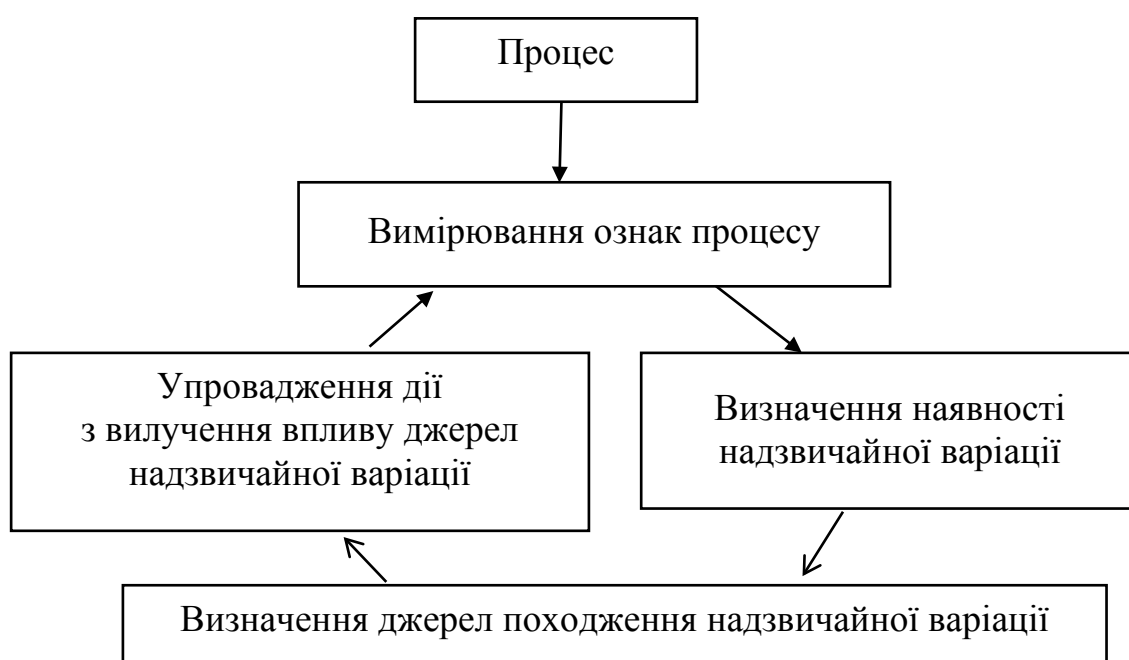


Рис. 4.11. Удосконалення процесів з використанням контрольних карт

Крок 6. Вибір інструмента для статистичного моделювання та проведення розрахунків.

Для моделювання обрано технології статистичного аналізу та обробки даних пакета програм Statistica, зокрема модуль промислової статистики (Statistica Quality Control) та інструменти «Шість сигм» [31].

Крім одновимірних контрольних карт (стандартні карти Шухарта), пакет Statistica розширює можливості використанням багатовимірних карт [32]. Багатовимірні карти дають змогу стежити за кількома процесами, що є надзвичайно ефективною функцією. Всі карти можуть бути побудовані як на основі наданих користувачем специфікацій, так і з використанням показників (вибіркове середнє, розмахи, частки тощо), які розраховуються з даних [33].

Використання контрольних карт уможливорює виявляти нестабільні процеси транспортно-логістичних підприємств, усувати причини відхилення від норми й підвищувати якість та ефективність таких процесів. Це, зі свого боку, дає можливість підвищувати якість обслуговування клієнтів і покращувати імідж логістичного підприємства.

Крок 7. Аналіз результатів моделювання. Виявлення нестабільних процесів на логістичному підприємстві.

Крок 8. Формування пропозицій щодо покращання показників якості на основі стабілізації транспортно-логістичних процесів підприємства.

Крок 9. Перевірка ефективності заходів стабілізації процесів транспортно-логістичного підприємства за допомогою моделювання вдосконалених процесів. Якщо мети не досягнуто, переходимо до виконання кроку 8, доки процеси не стабілізуються.

#### **Моделювання транспортно-логістичних процесів підприємства із застосуванням контрольних карт**

Розглянемо модельний приклад для вдосконалення діяльності логістичної фірми. Функція контролю уможливорює виявити проблеми шляхом попереднього аналізу та вчасного коригування виконуваних процесів, щоб уникнути кризового стану. За результатами аналізу статистики виконання завдань можна приймати управлінські рішення щодо зміни ходу виконання процесу стосовно перерозподілу функцій між співробітниками (відділами), заохочення та мотивації персоналу тощо. Починаємо моделювання з аналізу напрямів покращання процесів, що розвиває модель управління підприємством.

Проаналізуємо основні фактори, які впливають на розвиток ланцюгів постачання на логістичному підприємстві. Результати систематизації факторів зображено на рис. 4.12.

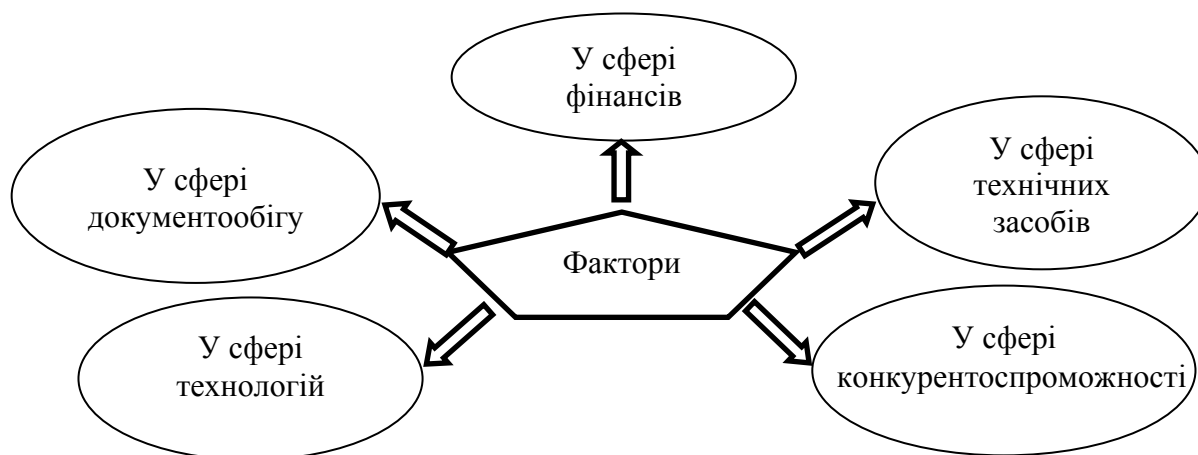


Рис. 4.12. Систематизація факторів, що визначають розвиток ланцюгів постачання на підприємстві

Можливі причини, що стримують розвиток підприємства, можна умовно поділити на групи:

– у сфері технологій: брак комплексного підходу до наскрізного транспортування (відсутність новітніх логістичних технологій перевезення); незадовільний наскрізний термін доставки і ритм поставок; низька надій-

ність поставки за принципом «точно в строк»; недостатня взаємодія з органами державного контролю; низький рівень взаємодії з операторами – власниками рухомого складу [19];

– у сфері конкурентоспроможності: недостатній рівень сервісу; недостатній рівень інформаційного обміну між усіма учасниками процесу товароруху; складні митні та прикордонні процедури; відсутність наскрізної тарифної ставки;

– у сфері документообігу: відносно застаріла система ведення документації; низький рівень ознайомлення і впровадження новітніх систем електронного документообігу; великі затрати часу на заповнення паперових бланків;

– у сфері фінансів: непослідовність тарифної політики логістичного підприємства; відносно велика частка невчасно сплачених рахунків перевізників;

– у сфері технічних засобів: недостатній розвиток спеціалізованого технічного забезпечення вантажних перевезень; відсутність достатньої кількості спеціальних пунктів прийому вантажів, складів тимчасового зберігання, обладнання для завантаження-вивантаження товару.

Результати аналізу факторів, що стримують розвиток якості ланцюгів постачання, зображено за допомогою діаграми Ісікави (рис. 4.13).

Механізм постійного поліпшення процесів на основі впровадження BPMS-системи дає змогу не лише спостерігати статистичні дані за наявними бізнес-процесами, але й контролювати чітко їх виконання. Моніторинг процесів показує характер реалізації як поточних процесів, так і завершених або перерваних. Якщо у процесів визначені планові показники (тимчасові, технічні тощо), то за допомогою BPMS-системи можна відстежувати, чи досягнуто цих показників у рамках процесу. Тобто отримується корисна інформація для прийняття правильних управлінських рішень [23].

За результатами аналізу операційних процесів логістичного підприємства (рис. 4.14) визначено напрями вдосконалення якості поставок. Обрані напрями, а саме забезпечення вчасної та якісної обробки заявок і доставки вантажів, виділено на схемі прямокутниками із заливкою.

Моделювання проводиться на основі зібраних статистичних даних з інформаційної бази підприємства. Необхідні дані для побудови контрольних карт упорядковуюємо в середовищі Excel (табл. 4.5). Вихідні дані є вибірками з одинадцяти окремих партій поставок вантажів по 5 серій кожна. У кожній серії подано дані про загальну кількість рахунків, кількість невчасно сплачених рахунків та кількість невчасно опрацьованих заявок. Також наведено дані за днями тижня щодо неопрацьованих заявок.

Моделювання статистичного управління якістю транспортно-логістичних процесів проведено з використанням програмного пакета Statistica [31]. Вихідні дані у вікні Statistica зображено на рис. 4.15.

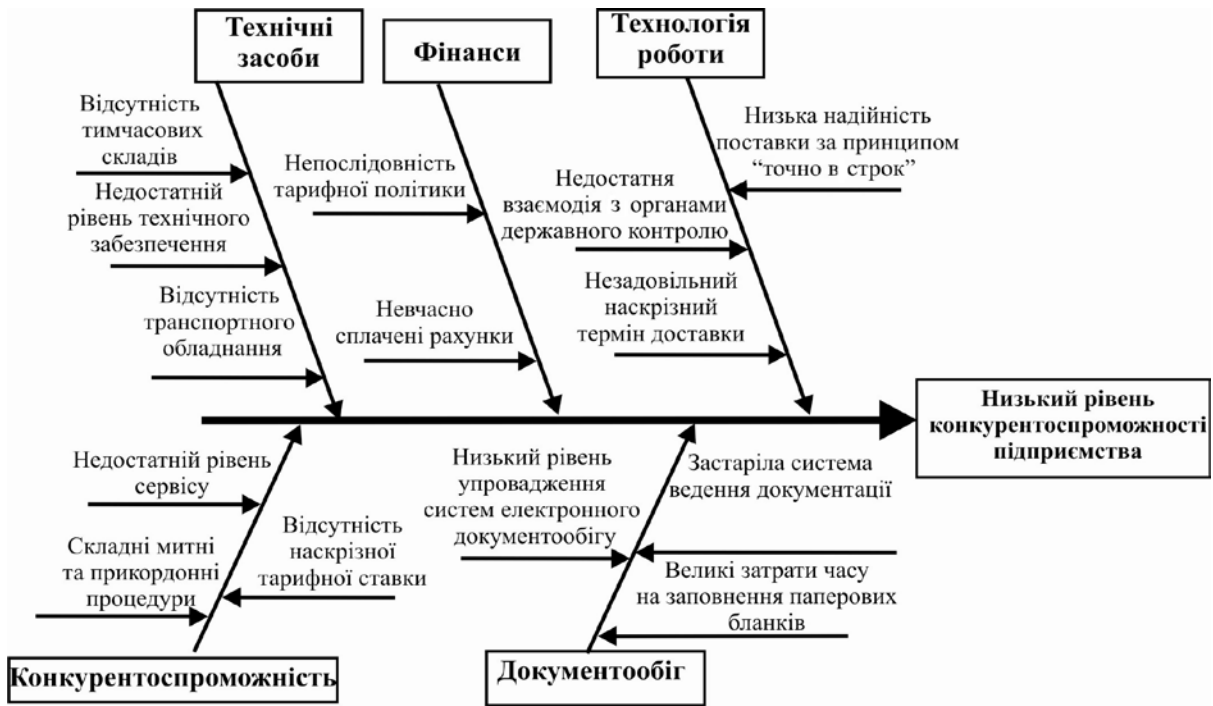


Рис. 4.13. Основні причини, що стримують розвиток якості ланцюгів постачання (діаграма Ісікави)

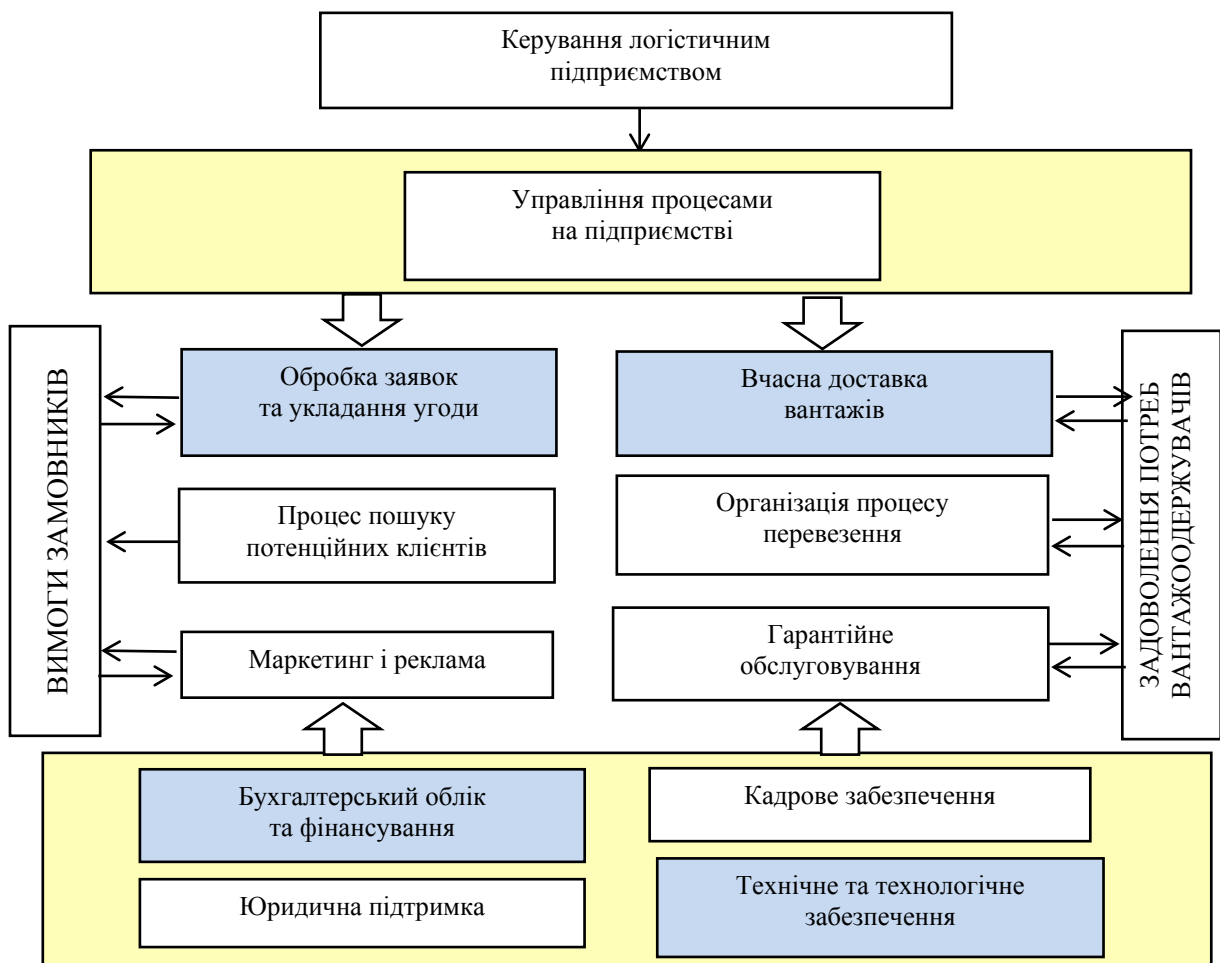


Рис. 4.14. Операційні процеси логістичного підприємства



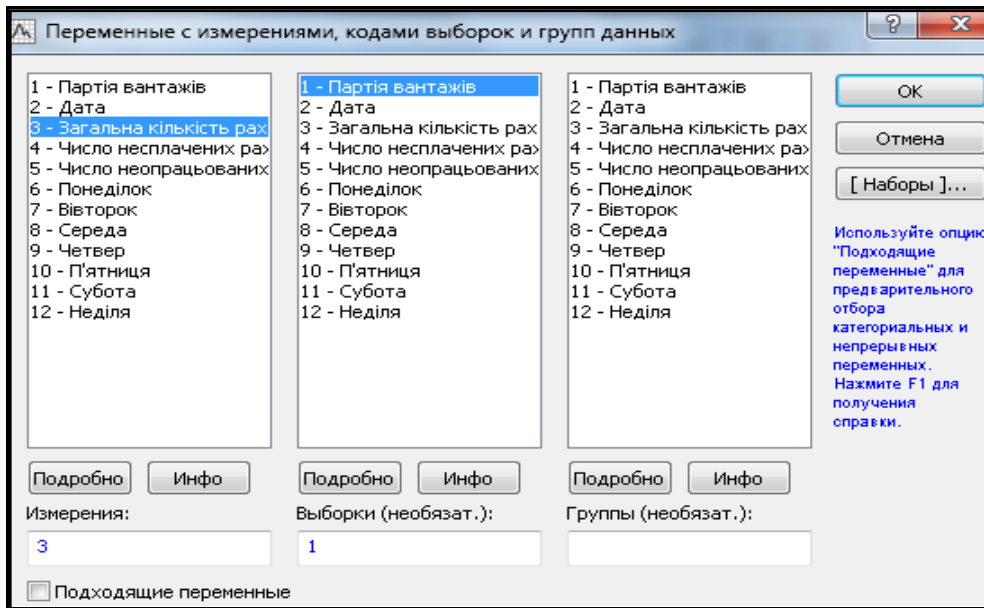


Рис. 4.15. Вікно змінних із вимірами, кодами вибірок і групами даних

Таблица 4.5

**Фрагмент вихідних даних для побудови контрольних карт**

Партія поставок	Дата	Загальна кількість рахунків	Кількість несплачених рахунків	Кількість неопрацьованих заявок	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Нд
21	01.09.2018	75	10	0	0	1	2	3	2	1	0
21	01.09.2018	68	2	1	0	0	2	0	0	0	0
21	01.09.2018	68	13	1	0	0	0	0	0	0	0
21	02.09.2018	71	3	0	0	0	0	2	2	0	0
21	02.09.2018	70	6	0	0	0	0	0	0	3	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
31	24.09.2018	72	8	0	3	0	0	0	0	2	0
31	25.09.2018	54	8	10	0	0	0	0	2	7	2
31	25.09.2018	56	13	9	0	2	0	0	0	4	6
31	26.09.2018	70	14	0	1	3	1	2	1	0	0
31	27.09.2018	68	3	0	0	0	2	1	2	0	2

Для проведення розрахунків файли вихідних даних імпортуються в систему Statistica. Далі переходимо в меню Аналіз => Промислова статистика і Шість сигм => модуль Карти контролю якості. За допомогою контрольних карт можна виявити нестабільні процеси перевезення та усунути причини надзвичайної варіації.

Для характеристики якості процесу перевезення вантажу за вихідними даними побудовано карти Шухарта середніх значень (рис. 4.16) та розмахів варіації (рис. 4.17). Отримані діаграми використовуються для статистичного контролю стабільності досліджуваних процесів.

Перша точка на карті розмаху варіації (рис. 4.17) дорівнює 7. Це розмах варіації даних 21-ї партії першої вибірки, аналогічні дані подано для всіх партій перевезених вантажів.

На карті Шухарта зображено контрольні межі. Точка, що вийшла за контрольні межі, називається викидом. Це означає, що процес нестабільний, треба шукати шляхи для подолання такої ситуації та стабілізації процесу [12]. Центральна лінія та контрольні межі розраховуються таким чином: оцінюється розмах варіації  $R_i$  кожної підгрупи; потім визначається середній розмах варіації для всіх підгруп:

$$R = \sum R/k, \quad (4.13)$$

де  $k$  – кількість груп.

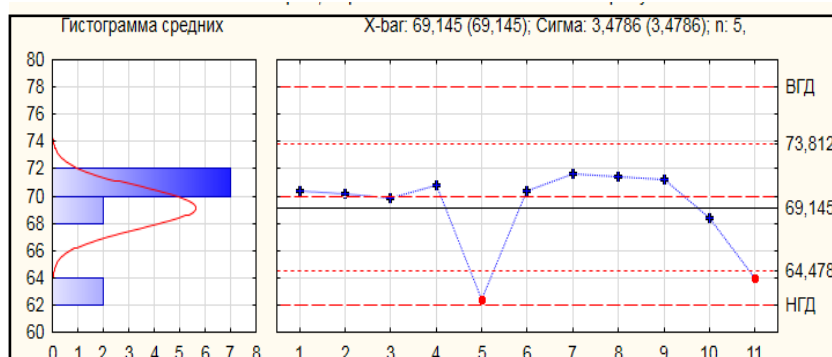


Рис. 4.16. Карта Шухарта середніх значень з X-bar

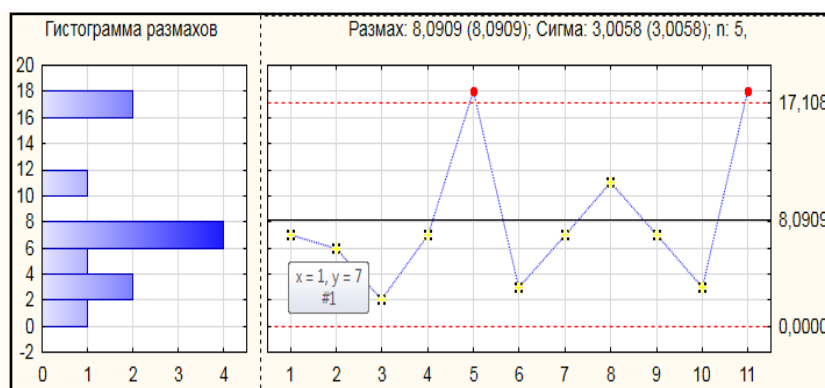


Рис. 4.17. Карта Шухарта розмахів варіації

Для побудови карти необхідно розрахувати центральну лінію ( $CL$ ), що відповідає еталонному значенню характеристики, а також верхню ( $UCL$ ) і нижню ( $LCL$ ) контрольні лінії контрольної карти середніх значень ( $\bar{X}$ -карти), які розраховуються так:

$$CL = \bar{R}, \quad (4.14)$$

$$UCL = \bar{R} + 3\sigma, \quad (4.15)$$

$$LCL = \bar{R} - 3\sigma. \quad (4.16)$$

Між вибірковими розмахами і стандартним відхиленням нормального розподілу існує залежність, яка має назву відносного розмаху [33]. Параметри розподілу цієї випадкової змінної  $W = R/\sigma$  визначаються розмахом вибірки  $n$ . Середнім значенням цієї змінної є величина  $d_2$ , а середньоквадратичним відхиленням  $d_2$ . Оскільки значення середньої величини процесу та її середньоквадратичного відхилення стандартні, параметри карти середніх значень будуть такими:

$$UCL = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (4.17)$$

$$CL = \mu, \quad (4.18)$$

$$LCL = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (4.19)$$

де  $\mu$  – сума фіксованого середнього.

Оскільки  $3/\sqrt{n} = A$ , де  $A$  – множник, який визначається лише обсягом вибірки  $n$ , то параметри карти середніх із заданими значеннями матимуть такий вигляд:

$$UCL = \mu + A\sigma, \quad (4.20)$$

$$CL = \mu, \quad (4.21)$$

$$LCL = \mu - A\sigma. \quad (4.22)$$

Для створення карти розмахів  $R$  зі стандартними значеннями (враховуючи, що  $\sigma = R/d_2$ ), значення параметрів будуть такі:

$$UCL = d_2 + 3d_3\sigma; \quad (4.23)$$

$$CL = d_2; \quad (4.24)$$

$$LCL = d_2 - 3d_3\sigma, \quad (4.25)$$

де  $d_2$  і  $d_3$  – константи, що залежать лише від обсягу вибірки  $n$ .

Нехай

$$D_1 = d_2 - 3d_3, \quad (4.26)$$

$$D_2 = d_2 + 3d_3. \quad (4.27)$$

Тоді матимемо:

$$UCL = D_2 \sigma; \quad (4.28)$$

$$LCL = D_1 \sigma. \quad (4.29)$$

Отримані дані зображено червоною товстою штриховою лінією (рис. 4.16) на карті Шухарта: центральна лінія – це номінал, знизу – нижня межа допуску, зверху – верхня межа допуску. Треба підкреслити, що межі допуску визначають факт вчасної чи невчасної доставки вантажів, а контрольні межі вираховуються зі складової процесу опрацювання нових заявок на перевезення та вчасного сплачення рахунків перевізників. Завдання контрольних меж полягає в тому, щоб показати, що на процес перевезення впливають деякі конкретні причини та зміщують його або призводять до того, що мінливість процесу стає занадто великою.

Статистичний контроль під час керування процесом застосовується для своєчасного введення коригувальних дій. Найчастіше в багатопараметричному процесі існує декілька якісних показників, які необхідно контролювати й регулювати. Побудуємо карти Хотеллінга  $T^2$  (рис. 4.18), що є багатовимірним аналогом карт Шухарта середніх значень і стандартних відхилень. Використовуємо дані спостережень за днями тижня. Значення  $T^2$ , які перевищують розраховані, характеризують порушення контрольних умов [31].

Аналіз розрахунку стабільності процесів перевезення, результати якого наведено на контрольних картах (рис. 4.16–4.18), свідчить, що дані на карті Шухарта середніх значень (рис. 4.16) вказують на те, що процес доставки вантажу погано керований, вибіркові середні 5-ї та 11-ї вибірок роз-

ташовані поза контрольними межами. Розладнання перевізного процесу засвідчує також гістограма розподілу вибірових середніх (графік зліва), демонструючи явну відмінність розподілу середніх від нормального. Також на карті розмахів варіації (рис. 4.17) спостерігаємо 2 викиди (розмах п'ятої та одинадцятої вибірок вищій від верхньої контрольної межі).

Наведений на рис. 4.18 багатовимірний потік відображає всі сім потоків на одній карті. Дві точки перебувають поза контрольними межами, що характеризує нестабільність процесу.

Проаналізувавши результати моделювання процесів, що характеризують якість поставки вантажу, бачимо порушення їх стабільності. Аналіз інформації щодо точок, які містяться поза контрольними межами, показав, що дні спостережень припадають на вихідні. Тому частина рахунків невчасно сплачується, що призводить до невчасної доставки вантажів.

Побудовані карти Хотеллінга  $T^2$  вказують на те, що процес став статистично некерованим ще й з іншої причини. Найбільша кількість неопрацьованих заявок припадала на вихідні дні. Через очікування своєї черги на опрацювання заявок виникають затримки щодо сплати рахунків і вчасного перевезення вантажу. Це впливає не лише на якість перевезення, але й на репутацію компанії. Щоб усунути ці проблеми, компанія залучила до роботи співробітника для опрацювання таких заявок у вихідні. Після опрацювання заявок, які надійшли у вихідні, процес стабілізується (рис. 4.17–4.21).

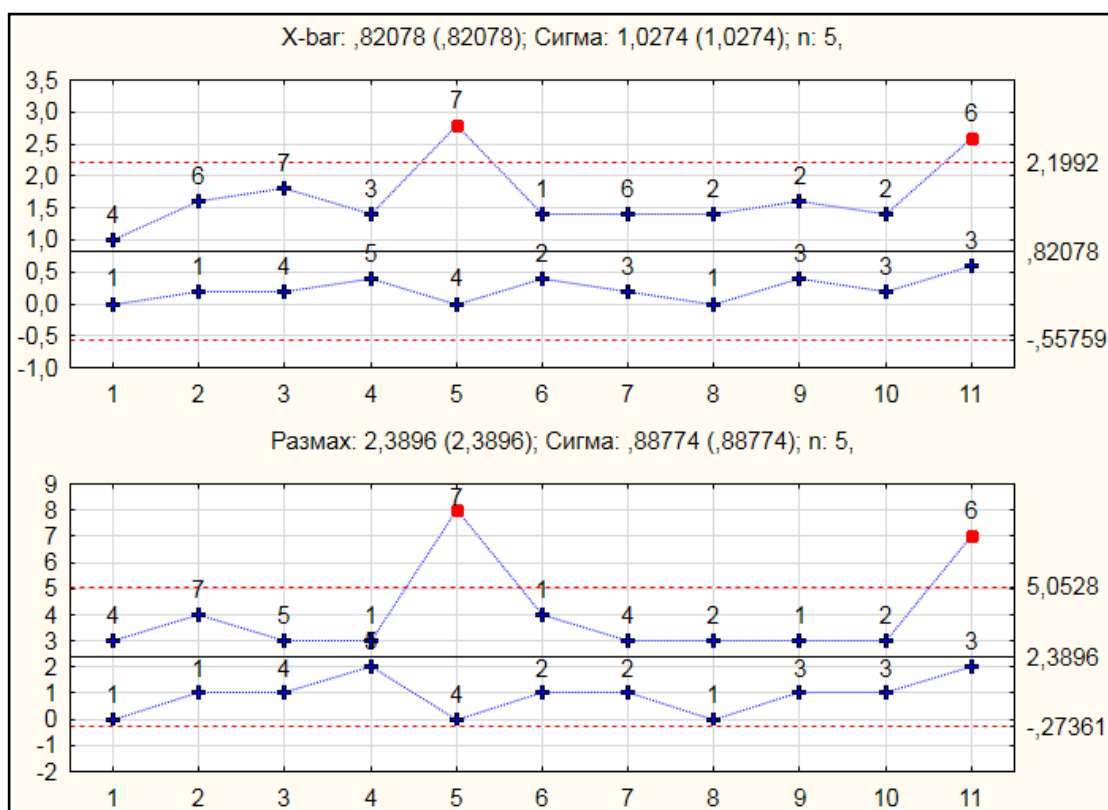


Рис. 4.18. Багатовимірний потік з X-bar і R-картами

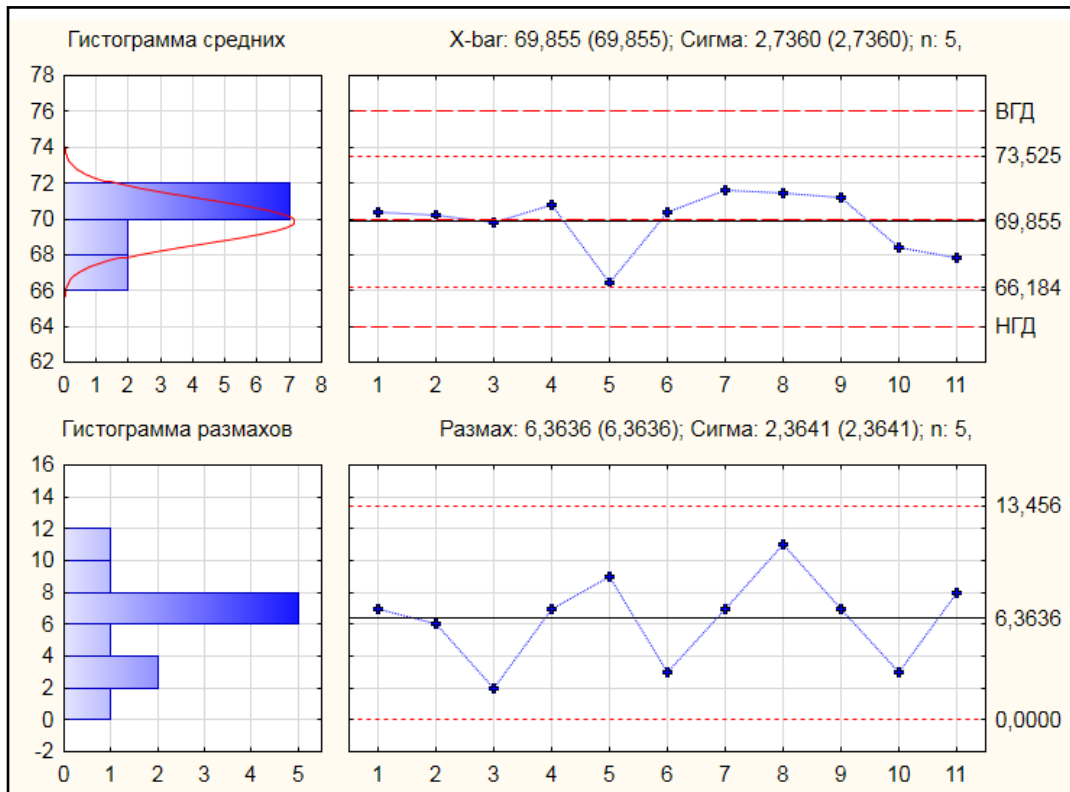


Рис. 4.19. Карти Шухарта для вдосконаленого процесу

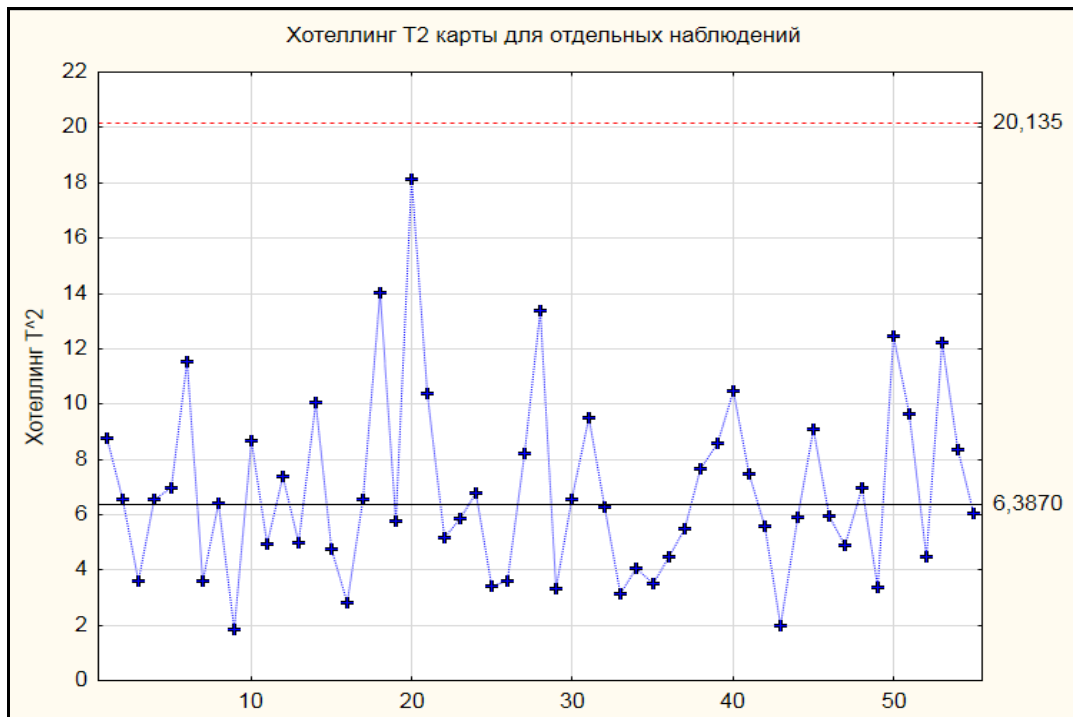


Рис. 4.20. Карта Хотеллінга  $T^2$  для окремих спостережень вдосконаленого процесу

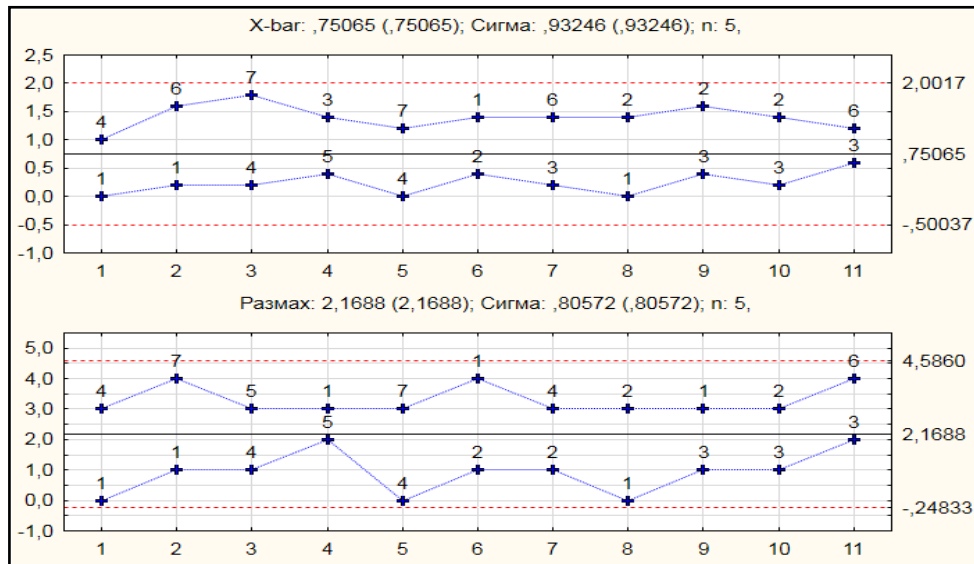


Рис. 4.21. Багатовимірний потік з X-bar та R-картами вдосконаленого процесу

Аналіз контрольних карт показує, що процес стає статистично стабільним.

**Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі.** Сформовано двофазну модель для обґрунтування ефективних заходів управління якістю транспортно-логістичних процесів підприємства. Перша фаза передбачає впровадження та розвиток процесного підходу в організації. Супроводжувати бізнес на всіх етапах становлення та вдосконалення процесного підходу дає змогу BPMS-система, механізм постійного поліпшення процесів якої уможливорює розвиток моделі управління в компанії. Застосування можливостей BPMS-системи дає можливість не лише збирати й упорядковувати статистичну інформацію за наявними бізнес-процесами, але й контролювати їх чітко виконання. Друга фаза ґрунтується на застосуванні процесного підходу та включає статистичне управління якістю процесів шляхом оцінки параметрів та їх моніторингу. Передбачається отримання інформації про варіацію процесу, досягнення стану його статистичної стабільності й одержання оцінок параметрів у цьому стані з подальшим контролюванням стабільності цих процесів.

Запропоновано алгоритм для виявлення нестабільних процесів підприємства й визначення шляхів їх стабілізації на основі статистичного управління показниками якості та вдосконалення транспортно-логістичних процесів за допомогою контрольних карт. В основу алгоритму покладено застосування механізму покращання процесів, який впливає на розвиток моделі управління підприємством на основі повного циклу Демінга (PDCA). Функція контролю – необхідний атрибут управління, який дає змогу виявити проблеми і відповідно скорегувати діяльність організації до того, як ці проблеми переростуть у кризу. Контроль здійснюється за допомогою попереднього аналізу виконуваних процесів.

Для статистичного управління процесами поставок логістичного підприємства проведено моделювання з використанням одного з головних модулів програмного пакета Statistica – промислова статистика та «Шість сигм». На основі проведених розрахунків побудовано карти Шухарта середніх значень та розмахів варіації, карти багатовимірного потоку Хотеллінга  $T^2$ . Моделювання із застосуванням контрольних карт дало змогу виявити порушення стабільності процесів. На основі проведеного аналізу запропоновано шляхи стабілізації процесів поставок для вдосконалення діяльності логістичного підприємства.

Такий підхід сприятиме прийняттю ключових для успіху підприємства управлінських рішень. Результати можуть бути використані для подальших досліджень у напрямі вдосконалення якості роботи логістичних підприємств.

### **Список використаних джерел:**

1. Сергеев В. И. Корпоративная логистика. 300 ответов на вопросы профессионалов / под общ. и научн. ред. проф. В. И. Сергеева. – М. : ИНФРА-М, 2004. – 976 с.
2. Кальченко А. Г. Логістика : навч. посіб. / Кальченко А. Г. – К. : КНЕУ, 2000. – 148 с.
3. Гринів Н. Т. Логістичні процедури транспортних технологій / Гринів Н. Т., Гагарін С. В., Данилович Т. Б. ; Національний університет “Львівська політехніка”, 2007. – С. 194–198.
4. Абрамов А. П. Маркетинг на транспорте : учебник для вузов / Абрамов А. П. ; под общей ред. д-ра экон. наук, проф. В. Г. Галабурды. – М. : Желдориздат, 2001. – 329 с.
5. Шершньова З. Є. Стратегічне управління : підручник / Шершньова З. Є. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : КНЕУ, 2014. – 588 с.
6. Нелеп В. М. Планування на аграрному підприємстві : підручник / Нелеп В. М. – К. : КНЕУ, 2004. – 495 с.
7. Яцківський Я. Ю. Загальний курс транспорту : навч. посібник / Я. Ю. Яцківський, Д. В. Зеркалов. – [Кн. 1] – К. : Арістей, 2007. – 544 с.
8. Офіційний сайт Метінвест [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://metinvestholding.com>
9. Офіційний сайт ПрАТ «ДКХЗ» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.dkhz.com.ua/index.php/corpdocs>
10. Мельник О. Г. Процес оптимізації управлінських рішень / О. Г. Мельник, А. М. Ульянова ; Національний університет “Львівська політехніка”, 2006. – С. 197–204.
11. Балабан П. Ю. Торговельна логістика : підручник / П. Ю. Балабан, Н. М. Тягунова, В. І. Місюкевіч. – К., 2014. – 148 с.
12. Чорний А. Ю. Статистика якості / А. Ю. Чорний, В. Б. Захожай. – К. : МАУП, 2011. – 263 с.
13. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування / Єріна А. М. – К. : КНЕУ, 2001. – 172 с.
14. Беляєв С. Ю. Управление качеством / Беляєв С. Ю., Забродин Ю. Н., Шапиро В. Д. – М. : Омега-Л, 2014. – 381 с.



15. Глухов В. В. Управление качеством : учебник / В. В. Глухов, Д. П. Гасюк. – М. : Омега-Л, 2005. – 321 с.
16. Ефимов В. В. Статистические методы в управлении качеством продукции / В. В. Ефимов, Т. В. Барт. – М. : КНОРУС, 2006. – 147 с.
17. Кане М. М. Системы, методы и инструменты менеджмента качества : учеб. пособие / М. М. Кане, Б. В. Иванов, В. Н. Корешков, А. Г. Схиртлатзе. – СПб. : Питер, 2008. – 560 с.
18. Овчаренко Г. С. Управління ланцюгами постачання підприємства на основі системи SCM / Г. С. Овчаренко, О. А. Рудківський. – К. : КНЕУ, 2011.
19. Костюк О. С. Стратегічне управління ланцюгом поставок / Костюк О. С. – К : МАУП, 2006. – 56 с.
20. Шацька З. Я. Управлінські інновації в системі підприємства / З. Я. Шацька // Актуальні проблеми економіки. – 2012. – № 1. – С. 176–182.
21. Ігнат'єва І. А. Стратегічний менеджмент / Ігнат'єва І. А. – К. : Каравелла, 2018. – 464 с.
22. Практический курс BPMN [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [https://www.elma-bpm.ru/journal/index.php?ELEMENT\\_ID=2900](https://www.elma-bpm.ru/journal/index.php?ELEMENT_ID=2900)
23. Сайт компанії ELMA [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://www.elma-bpm.ru>
24. Халіпова Н. В. Щодо формування культури використання передових технологій управління компанією на основі автоматизованих бізнес-процесів / Н. В. Халіпова // Формування сучасної моделі управління та підвищення якості менеджменту в системі вищої освіти : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. – Дніпро : УМСФ, 2018. – С. 224–226.
25. Исикава К. Японские методы управления качеством / Исикава К. – М. : Экономика, 1988. – 215 с.
26. Казинцев В. А. Шесть Сигм в России. Методика снижения потерь, дефектов, издержек / Казинцев В. А. – К. : Основа, 2009. – 368 с.
27. Николаева Э. К. Семь инструментов качества в японской экономике / Николаева Э. К. – М. : Издательство стандартов, 1990. – 88 с.
28. Бичківський Р. В. Управління якістю. Сертифікація / Р. В. Бичківський, П. Г. Столярчук, Л. І. Сопільник, О. О. Каменський. – К. : Школа, 2005. – 432 с.
29. Контрольные карты. Контроль качества по непрерывному признаку / сайт Statistica [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://statistica.ru/local-portals/quality-control/kontrolnye-karty>
30. Карты контроля качества / сайт StatSoft [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stquacon.html>
31. Боровиков В. П. Statistica: искусство анализа данных на компьютере / Боровиков В. П. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2003. – 688 с.
32. Карты контроля качества. Многомерные карты / сайт StatSoft [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [http://statsoft.ru/products/STATISTICA\\_QC/qcc.php](http://statsoft.ru/products/STATISTICA_QC/qcc.php)
33. ДСТУ ISO 8258-2001. Статистичний контроль. Контрольні карти Шухарта : національний стандарт України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [http://dnaop.com/html/34003/doc-ДСТУ\\_ISO\\_8258-2001](http://dnaop.com/html/34003/doc-ДСТУ_ISO_8258-2001)

## 5. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ АВТОМОБІЛЬНОГО ТРАНСПОРТУ НА ВАНТАЖНОМУ ТЕРМІНАЛІ

### 5.1. Аналіз функціонування вантажних терміналів як складних динамічних відкритих систем

Безупинний розвиток транспортних процесів і технологій відбувається під впливом кількісних та якісних перетворень у системі сполучень, інфраструкції та комунікацій. Особливого значення набуває раціоналізація виробництва і споживання, організація перевезень з мінімальними термінами доставки і витратами, вдосконалення транспортного обслуговування на основі широкого використання логістичних технологій.

Інтегровані транспортно-технологічні системи доставки вантажів за участю декількох видів транспорту дають змогу об'єднати інтереси вантажовідправника, перевізника та одержувача. Близько 90–95 % українських зовнішньоторговельних вантажів здійснюється за участю двох і більше видів транспорту. На транспортних терміналах, які є стиковими пунктами різних транспортних систем, вантажі перебувають до 70 % загального часу доставки. Тривала затримка вантажів, що пов'язана з виконанням технологічних, комерційних і митних операцій, здорожує змішані перевезення, знижує конкурентоспроможність вітчизняних перевізників на транспортному ринку [1].

Аналіз логістичних схем транспортування вантажів свідчить про те, що автомобільний транспорт спочатку розвивався як безперевалочний вид транспорту, а можливість прямої доставки вантажу «від дверей до дверей» традиційно розглядалась як його перевага. Однак розвиток змішаних перевезень за участю автомобільного транспорту став причиною неабиякого поширення термінальної технології і на автомобільному транспорті. Саме автотранспортні термінали насамперед почали перетворюватися із суто транспортних на універсальні логістичні об'єкти [2].

Перевезення в змішаному сполученні – це найбільш складний і один зі стратегічно важливих для України видів транспортної діяльності, що забезпечує сектор зовнішньої торгівлі та відповідає всім запитам ринку. Він дає змогу нівелювати окремі недоліки різних видів транспорту, знижувати транспортні витрати, скорочувати терміни доставки кінцевим споживачам, підвищувати якість транспортного обслуговування вантажовласників. Велику роль тут відіграють автотранспортні термінали, що можуть розташовуватися в промислових зонах, на території морських та річкових портів, аеропортів, логістичних центрів. Нерідко розташування автотранспортного терміналу визначається зручністю виходу на магістральні дороги або доступністю автодорожньої мережі з високими осьовими навантаженнями, що необхідно для експлуатації великотоннажних автопоїздів.

Таким чином, актуальність даної роботи визначається потребою розробки теоретичних положень, спрямованих на підвищення ефективності організації функціонування вантажного терміналу в логістичному ланцюзі перевезень зовнішньоторговельних вантажів у змішаному автомобільно-морському сполученні.

Теоретичні та методологічні основи побудови та вдосконалення систем взаємодії різних видів транспорту, а також управління процесами обробки вантажів на терміналах і підвищення ефективності їх роботи висвітлено в працях багатьох вітчизняних і зарубіжних учених. Основи сучасної теорії управління транспортними системами закладені в працях О. О. Бакаєва, Є. М. Воєвудського, Т. А. Воркута, В. Г. Галабурди, Е. П. Громового, В. К. Долі, Т. Ф. Кузнєцова, А. О. Мурад'яна, І. О. Лапкіної, В. М. Назаренка, В. Я. Негрея, В. А. Персіанова, К. І. Плужникова, В. П. Поліщука, С. М. Резера, А. М. Редзюка, О. О. Смєхова, О. О. Союзова, Є. М. Сича, Ю. М. Цветова, О. Г. Шибаєва, В. Г. Шинкаренка та інших учених-транспортників.

Питанням удосконалення організації та управління роботою морського порту як особливого виду вантажного терміналу присвячено дослідження провідних фахівців у цій галузі, таких як В. З. Ананьїн, А. І. Брюм, О. О. Балобанов, Л. Д. Вітренко, Л. О. Деревич, О. В. Кирилова, Е. Д. Крушкін, О. Р. Магамадов, П. А. Макушев, Г. С. Махуренко, І. В. Морозова, І. М. Петров, М. Я. Постан, Г. П. Столяров та ін.

Теоретичні основи управління діяльністю транспортних підприємств закладено в працях таких зарубіжних учених, як Н. Ансоффа, Д. Бенсон, Л. Колінс, Дж. Коттер, М. Крістофер, П. Сенж, Дж. Уатхед, Й. Шефф та ін. До вітчизняних учених, які зробили великий внесок у розвиток теорії адаптивного управління підприємством в умовах невизначеності й ризику, належать В. В. Вітлінський, В. М. Гранатуров, В. А. Забродський, Т. С. Клебанова, Ю. Г. Лисенко, А. В. Матвейчук, Н. В. Румянцев, В. П. Стасюк, А. І. Черняк, З. М. Шор, С. Я. Шоргін, Д. Б. Юдін, А. Я. Ястремський та ін.

Проблемам моделювання та оптимізації параметрів портових перевантажувальних комплексів на основі методів теорії масового обслуговування (ТМО) присвячено багато досліджень. Серед них можна виокремити монографії М. М. Горбатого, Є. М. Воєвудського, М. Я. Постан, І. В. Савельєвої.

Науковий інтерес викликають результати праці [3], в якій досліджено методи створення систем для реалізації інтелектуального управління технологічними процесами транспортування вантажів і перевантажувальними процесами в морському порту. Показано, що використання методів віртуальних технологій дає змогу розробити і реалізувати структуру віртуального транспортного підприємства. Застосування методів віртуальних підприємств необхідно для оперативного пошуку технології нерегулярних промислових вантажопотоків з побудовою логістичної системи доставки вантажів від промислового підприємства (постачальника) до споживача. Зазначено, що функціонування інфраструктур, які входять до складу морського порту, а також їх інформаційну взаємодію з постачальниками вантажів і вантажоодержувачами, що входять до складу транспортної системи, математично описати неможливо. Це пов'язано зі складним видом алгоритмічного опису функціонування обладнання, що входить до складу технологічних процесів обробки різних видів вантажів. У даній дисертації показано, як отримані математичні моделі управління процесами переміщення

вантажопотоку дають змогу за допомогою пакета MATLAB виконувати завдання оптимізації різних за змістом варіантів переміщення сипучих вантажів у межах перевантажувального комплексу. Моделювання різних варіантів переміщення сипучих вантажів необхідне для забезпечення заданої інтенсивності навантаження судна з урахуванням різних факторів, у тому числі погодних. Розроблені моделі уможливають виконання завдання планування проведення робіт з обробки вантажів на терміналах морських портів.

Методичні основи узгодженого управління процесом перевалки вантажів у загальнотранспортних вузлах були запропоновані у науковій праці [4]. Незважаючи на широке висвітлення проблем управління на транспорті й у морських портах, питання дослідження функціонування транспортних систем як єдиного транспортного об'єкта, що здійснює управління взаємодією підприємств – постачальників продукції, залізничного транспорту, терміналів перевантаження вантажів у морському порту, морського транспорту та одержувача вантажів, а також питання інтелектуалізації цих процесів вивчені ще не достатньо. Тому виникає питання вдосконалення системи змішаних автомобільно-морських перевезень на основі чіткої взаємодії та координації роботи транспорту та інших учасників перевізного процесу на території вантажного портового терміналу.

Транспорт – велика система, що вирізняється стохастичним характером поведінки, складається з низки елементів (вантажу, транспортного засобу, транспортних мереж тощо), робота яких нині не визначена однозначно, хоча наука відпрацювала цілу низку підходів до виконання окремих транспортних завдань. Виконання транспортних завдань у зв'язку зі складністю і стохастичністю процесу транспортування потребує застосування ситуативних методів, тобто логістичних процедур для аналізу ситуацій, що виникають під час проєктування та реалізації процесу транспортування вантажів.

Характерним прикладом місця ризику на транспорті є перевантажувальні процеси, що виникають на вантажних терміналах через можливу неузгодженість роботи транспорту і перевантажувальної техніки, псування тари та упаковки, невідповідність вантажопідйомності транспортного засобу та потужності механізмів тощо, що може призвести до розриву чи подовження за часом логістичного ланцюга і, зрештою, до збільшення вартості [5].

З погляду системного підходу сучасний морський торговельний порт (як комплекс підприємств, що працюють на його території та акваторії) становить складну відкриту динамічну систему, що функціонує в умовах невизначеності і ризику [6]. З формального погляду система – це велика кількість, на якій реалізується заздалегідь дане відношення  $R$  із фіксованими властивостями  $P$ . Таким відношенням зазвичай виступають вимоги певного порядку, зв'язки між елементами системи: події, що відбуваються в одному з елементів системи, якимось чином впливають на події в інших елементах. Як і будь-яка відкрита система, порт функціонує в деякому цілком визначеному зовнішньому середовищі, що являє собою безліч клієнтів (портових структур і різних підприємств).

Взаємодія системи із зовнішнім середовищем здійснюється через вхід і вихід системи. Під входом при цьому розуміється точка або область впливу на систему ззовні, під виходом – точка або область впливу системи ззовні. Вхідні впливи мають невизначений або випадковий характер, що створює додаткові труднощі в управлінні цією системою.

Залежно від ступеня взаємовпливу системи і зовнішнього середовища системи поділяються на відкриті й замкнуті. Порт є прикладом відкритої системи, оскільки на виробничі процеси, що відбуваються в ньому, суттєво впливають умови середовища.

Динамічна система в різні моменти часу може перебувати в різних станах. Зазвичай безліч її можливих станів фіксована. Стан будь-якої системи в певний момент часу можна з певною точністю охарактеризувати сукупністю значень внутрішніх параметрів стану. Для порту такими параметрами є, наприклад, кількість суден, що перебувають біля причалів під вантажною обробкою або в очікуванні її початку, кількість автомашин або вагонів під вантажними операціями, кількість одиниць перевантажувальної техніки, чисельність докерів-механізаторів та ін. [7]. Однак найбільш важливим параметром є вантажопотоки, їх об'єм і розподіленість за портовими операторами (стивідорними компаніями).

Будь-яка динамічна система характеризується деякою областю значень фазових координат, у межах якої можна говорити про систему як про єдине ціле. Така область називається областю існування системи або її областю можливих траєкторій. Якщо координати системи можуть приймати в межах області існування будь-яких значень, то системи називаються безперервними.

До безперервних координат належать, наприклад, кількість вантажу на складах і транспортних засобах, стоянковий час суден тощо. Якщо ж фазові координати можуть приймати тільки кінцеве число фіксованих значень, то системи називаються дискретними. Дискретними характеристиками описуються такі змінні, як число транспортних засобів під вантажними операціями і в очікуванні їх початку, кількість засобів портової механізації та докерів-механізаторів.

Будь-яка динамічна система характеризується трьома групами змінних [6]:

- вхідними змінними, які генеруються зовнішнім середовищем,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

- вихідними змінними, які підсумовуються досліджуваною системою і визначають вплив системи на навколишнє середовище,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ;

- фазовими характеристиками, що характеризують динамічну поведінку досліджуваної системи,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$ .

Усі три групи змінних передбачаються функціями часу, тобто  $x(t), y(t), z(t)$ . Стосовно діяльності портового оператора входами можуть служити підготовленість персоналу, склад і якість перевантажувального обладнання, рівень технології, фонд заробітної плати. Виходами будуть кількість перевантаженого вантажу, рівень якості виконання перевантажувальних операцій, витрати грошових і матеріальних ресурсів та ін.

У будь-який момент часу  $t$  стан системи є функцією початкового стану  $z(t_0)$ , визначеного для початкового моменту часу  $t_0$ , і змін функції входу  $x(t_0, t)$  в інтервалі часу  $(t_0, t)$ , тобто

$$z(t) = F(z(t_0), x(t_0, t)), \quad (5.1)$$

де  $F$  – деяка функція від аргументів  $z(t), x(t)$ .

Вектор виходу в момент  $t$  можна подати так [6]:

$$y(t) = \psi(z(t_0), x(t_0, t)), \quad (5.2)$$

де  $\psi$  – деяка функція зміни станів.

Рівняння (5.1) і (5.2) є рівняннями стану системи. Як правило, функції  $F$  і  $\psi$  визначаються шляхом розв'язання початкової задачі для диференціальних рівнянь, що описують траєкторію зміни станів системи, тобто рівнянь виду:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= f(z(t), x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= g(z(t), x(t)), \end{aligned} \quad (5.3)$$

де  $f(.,.), g(.,.)$  – задані функції.

Можна зробити висновок, що рівняння (5.3) – це початковий, але досить важливий етап аналізу і синтезу систем у сучасній теорії управління процесами взаємодії різних видів транспорту на вантажному терміналі. Впливаючи на входи системи, можна перевести її з одного стану в інший, і таким чином отримати зміни на виході, що фіксує новий стан системи. Переведення її з одного стану в інший супроводжується певними енергетичними, фінансовими, трудовими затратами. Управління називається оптимальним, якщо перехід системи з одного стану в інший, відповідний досягненню мети, супроводжуватиметься мінімальними витратами [4].

У детермінованій системі зв'язки між елементами і подіями мають однозначний, обумовлений характер. Прикладом такої системи можуть служити звичайні машини і механізми, автоматизовані виробничі лінії (якщо знехтувати можливістю випадкових відмов їх елементів і вузлів).

У ймовірнісній (стохастичній) системі, на відміну від детермінованої, зв'язки між елементами і подіями мають неоднозначний характер: одні й ті ж зміни елементів системи в кожному окремому випадку можуть привести до різних подій. Однак і тут немає місця хаосу – зв'язки між елементами і подіями існують у формі ймовірнісних закономірностей. Наприклад, зміна в технології виробництва призводить до певної зміни загальної кількості браку продукції.

У реальності чітко детермінованих систем не існує. Очевидно, що навіть у високонадійній техніці завжди є ймовірність відмови окремих деталей або вузлів. Тому під час дослідження процесів взаємодії різних видів транспорту на портових терміналах правильніше визначити детерміновану систему як окремий випадок імовірнісної системи, в якій ймовірність очікуваної події близька до одиниці. З погляду стійкості в часі та прогнозованості вантажообігу це детермінована система; з погляду впливу випадкових чинників економічного, гідрометеорологічного, навігаційного, екологічного, санітарного і навіть криміногенного характеру – це ймовірнісна система. Завдання термінального оператора – імовірнісну систему максимально наблизити до детермінованої. Сучасний вантажний термінал, особливо той, що розташований у транспортному вузлі на стику декількох видів транспорту, слід зарахувати до складних динамічних і відкритих систем.

Під складною системою, на відміну від простої, розуміється така система, яка не може розглядатись як просте об'єднання складових її частин. Останнє означає наявність у системи таких властивостей, якими не володіють її окремі частини. Щодо вантажного терміналу порту це означає високоефективну організацію перевантажувальних робіт, можливість вертикальної та горизонтальної кооперації між різними терміналами, між портовою адміністрацією та операторами терміналів тощо.

Динамічний характер системи означає, що вона перебуває в динаміці, тобто впродовж кінцевого проміжку часу переходить від одного стійкого стану до іншого. Цим вона відрізняється від статичної системи, яка з часом не змінює свою структуру або стан. Однак оскільки в реальності статичних систем практично не існує, то динамічними системами, на відміну від статичних, зазвичай називають системи, перехід яких у новий стан не може відбуватися миттєво, а потребує деякого часу. Прикладом такої системи може служити система управління вантажним терміналом або окремим його фронтом.

Складні системи характеризуються єдиною метою функціонування, декількома рівнями управління, ієрархічними зв'язками. На функціонування переважної більшості реальних складних систем впливає безліч випадкових факторів. Їх можна умовно поділити на дві групи: фактори внутрішньої та зовнішньої невизначеності. У зв'язку з цим передбачити поведінку складної системи можна лише ймовірно, тобто визначити ймовірність настання очікуваного стану, знайти закони розподілу або деякі числові характеристики випадкових величин, що характеризують поведінку системи.

## 5.2. Аналіз обсягів роботи портових вантажних терміналів і технології взаємодії різних видів транспорту на них

З метою визначення особливостей перебігу процесів на вантажному терміналі морського порту доцільно проаналізувати статистику роботи портів і простежити динаміку. Через порти України щорічно перевалюються великі обсяги різноманітних вантажів: металовиробів, контейнерів, будівельних, наливних, насипних тощо. Нині максимальні можливості прийняття та обробки зернових вантажів портовими операторами України становлять 58,5 млн т/рік. Додаткові можливості перевантаження зернових за прямим варіантом становлять 12,6 млн т/рік [8]. Номенклатуру вантажів, що переробляються в українських портах, зображено на рис. 5.1.

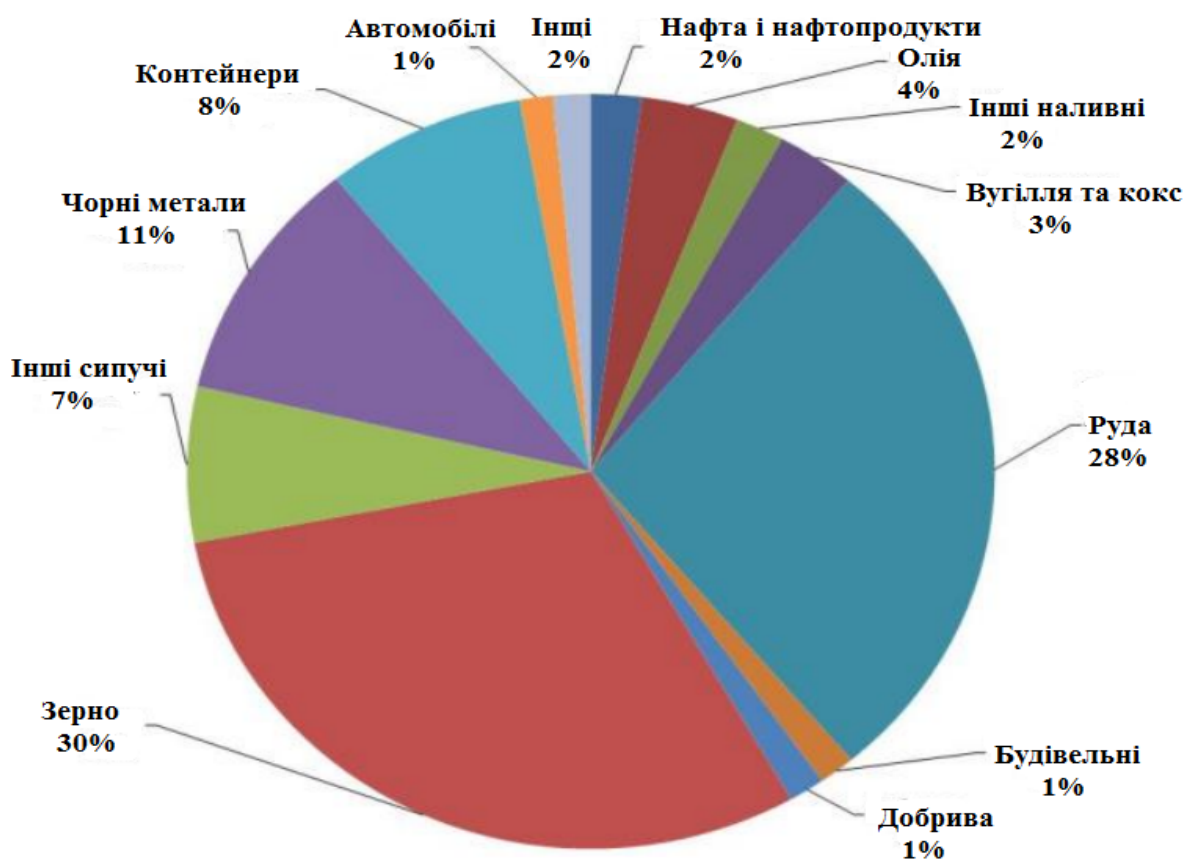


Рис. 5.1. Номенклатура вантажів, які перевантажувались у морських портах України у 2020 р. [9]

Як видно з рис. 5.1, найбільша частка вантажів припадає на зерно, тому за об'єкт дослідження взято вантажний зерновий термінал морського порту, який обслуговується автомобільним транспортом. За даними Адміністрації морських портів [10], в Україні працює 12 портів, які мають потужності для зберігання та перевалки зернових. На даний момент в Україні будується 10 портових терміналів, ще 25 проєктів – у стадії підготовки. Сумарно за рік українські термінали можуть перевалити



51,9 млн т, а одночасно зберігати – 2,5 млн т. Найбільші термінали мають Миколаївський порт – 11,1 млн т річної перевалки, Одеський – 8,7 млн т, Південний – 8,55 млн т і Чорноморський – 8,32 млн т.

Аналіз показує, що, незважаючи на певні коливання, обсяги перевалки вантажів у портах демонструють стійку тенденцію до зростання (рис. 5.2) і за 20 років зросли на 60 % [9]. Таким чином, з урахуванням темпів зростання найближчим часом обсяги експорту зернових вантажів можуть перевищити пропускну спроможність морських портів.

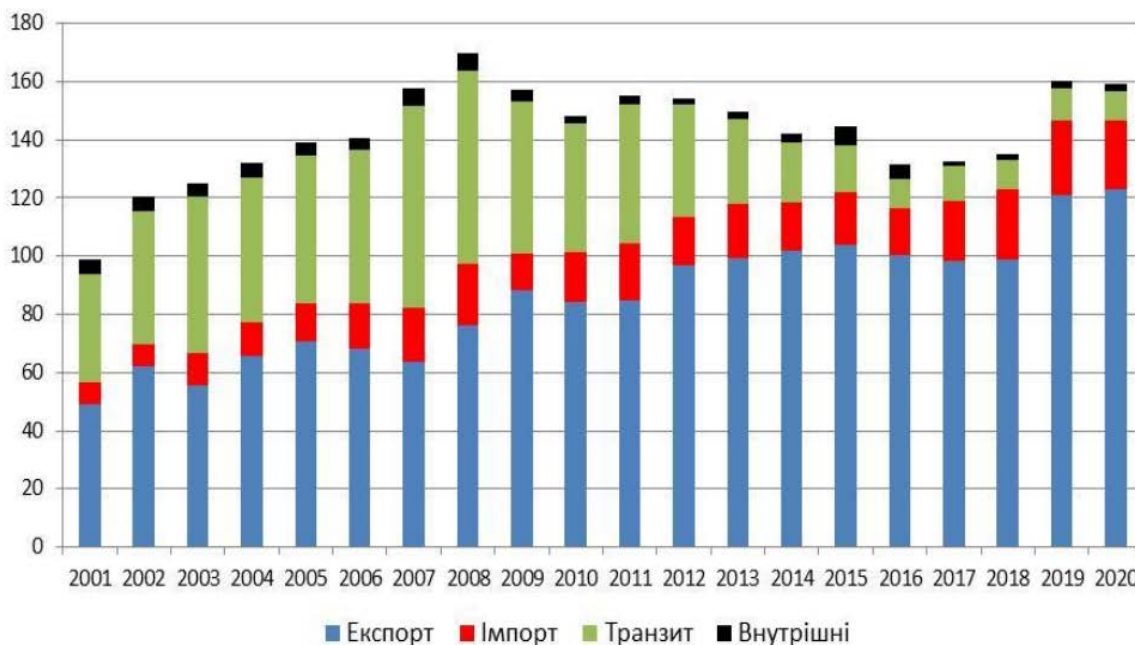


Рис. 5.2. Динаміка зміни обсягів та структура перевалки вантажів в українських портах за період з 2001 до 2020 рр. [9]

Згідно з даними [11], у 2020 р. в Україні за обсягами поставок лідувала кукурудза з результатом відвантаження 27,1 млн т, що становило половину експорту зернових. Через пандемію, спричинену коронавірусом COVID-19, експорт кукурудзи порівняно з 2019 р. скоротився на 4,3 млн т, або на 13,7 %. Серед портів максимум кукурудзи відправлено з Чорноморська та Миколаїва – 9,6 і 8,6 млн т відповідно (рис. 5.3). З «Південного» експортували 4,8 млн т, з Одеси – 4 млн т.

У даній праці моделювання системи обслуговування автомобільного транспорту виконано на прикладі вантажного терміналу морського порту «Південний». За аналізований період вантажообіг зернових на ньому становив 27,1 млн т, тобто 34,8 % від загального обсягу зернових вантажів, перевантажених усіма портами України [12]. Такі показники визначають морський порт «Південний» як один з найбільш важливих транспортних вузлів. Проектна потужність терміналу MV Cargo становить 5 млн т збіжжя на рік [13].

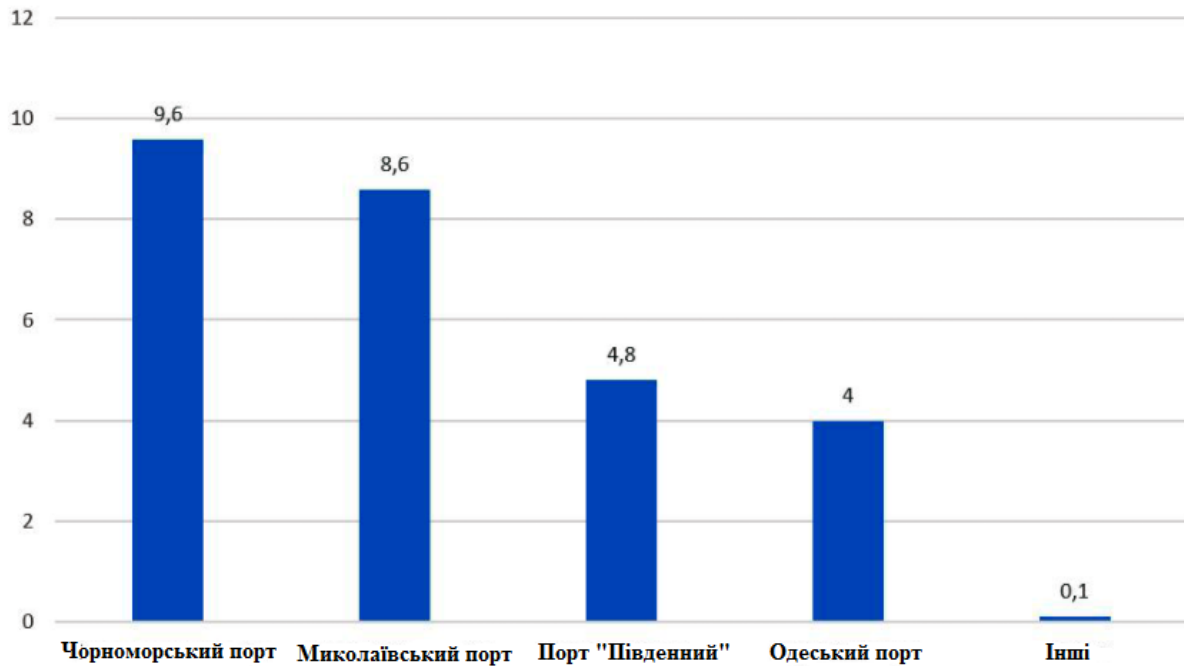


Рис. 5.3. Експорт кукурудзи з морських портів України за 2020 р. [11]

Розглядається технологічна схема, за якої доставка зерна в порт здійснюється автомобільним транспортом. На рис. 5.4 зображено розміщення майданчика для стоянки автомобілів перед в'їздом на вантажний термінал порту «Південний». Вантажний термінал «Нептун» складається із 14 силосів (по 15 тис. т кожен) та бетонного складу, що вміщує до 80 т зернових. Оскільки автомобілі не можуть одночасно обслуговуватись на території зернового терміналу, виникає серйозна проблема для нормального функціонування змішаної автомобільно-морської системи вантажних перевезень. Комплексна технологія переробки вантажів із взаємною ув'язкою графіків роботи суден та автомобілів призначена для максимального виконання перевантажувальних операцій за прямим варіантом. Такий підхід може значно покращити рівень використання транспортних засобів суміжних видів транспорту і вантажно-розвантажувальних машин.

Наявність у суміжних транспортних підприємств обчислювальних центрів дає змогу створити єдину інформаційну систему із загальною базою даних і працювати на основі безперервного плану-графіка, розробленого в порту й узгодженого з усіма учасниками перевізного процесу.

З погляду системного підходу керуванню, тобто виробничу систему порту можна поділити відповідно до процесів на такі підсистеми: розвиток портових послуг, їх підготовка, власне перевалка, забезпечення і обслуговування, реалізація послуг [14; 15].



Рис. 5.4. Розміщення майданчика для стоянки автомобілів перед в'їздом на вантажний термінал порту «Південний» [13]

Поняття організації включає становлення системи та управління її функціонуванням. Мета функціонування системи управління портом – забезпечення найкращої (щодо обраних критеріїв) роботи порту. Система управління характеризується організаційною та функціональною структурами. Організаційна та функціональна структури системи управління відображають, як правило, структуру об'єкта управління в тому сенсі, що основним підрозділам порту відповідають аналогічні підрозділи системи управління.

До основних функцій управління портом належать [4]:

- планування виробничо-економічної діяльності;
- оперативне управління перевалкою вантажів;
- управління розвитком порту і технічною підготовкою перевалки вантажів;
- управління матеріально-технічним постачанням;
- контроль якості продукції;
- облік наданих послуг і здійснення фінансової діяльності;
- управління технічним забезпеченням та організаційно-господарським обслуговуванням роботи порту;
- добір, розстановка, виховання і підвищення культурно-технічного рівня кадрів;
- управління соціальним розвитком порту;
- вдосконалення організації послуг, праці та управління.

Для реалізації цих функцій необхідно забезпечити виконання комплексу робіт з розв'язанням окремих задач, пов'язаних як зі стратегічним, так і з оперативним управлінням. Загальна схема управління вантажними роботами на терміналі стивідорної компанії зображена на рис. 5.5 [16].

Основною виробничою функцією стивідорної компанії є управління діяльністю з переробки вантажів [16; 17]. Розробка технологічних схем – це ключовий етап проектування технології, від якого із заданими умовами найбільшою мірою залежить її ефективність.

Вихідними даними для розробки технологічних схем є відомості про зовнішні умови технологічного процесу, інформація про вантаж (технологічна характеристика та обсяг вантажообігу), вантажовласників і вантажовідправників. Крім того, аналізуються звітні відомості та матеріали портів, в які вантаж уже надходив. Перспективне проектування здійснюється на основі спеціальних досліджень тенденцій розвитку вантажопотоків і транспортних зв'язків. Технологію перевезення і тип використовуваних транспортних засобів визначають перевізники (пароплавства та автотранспортні підприємства).

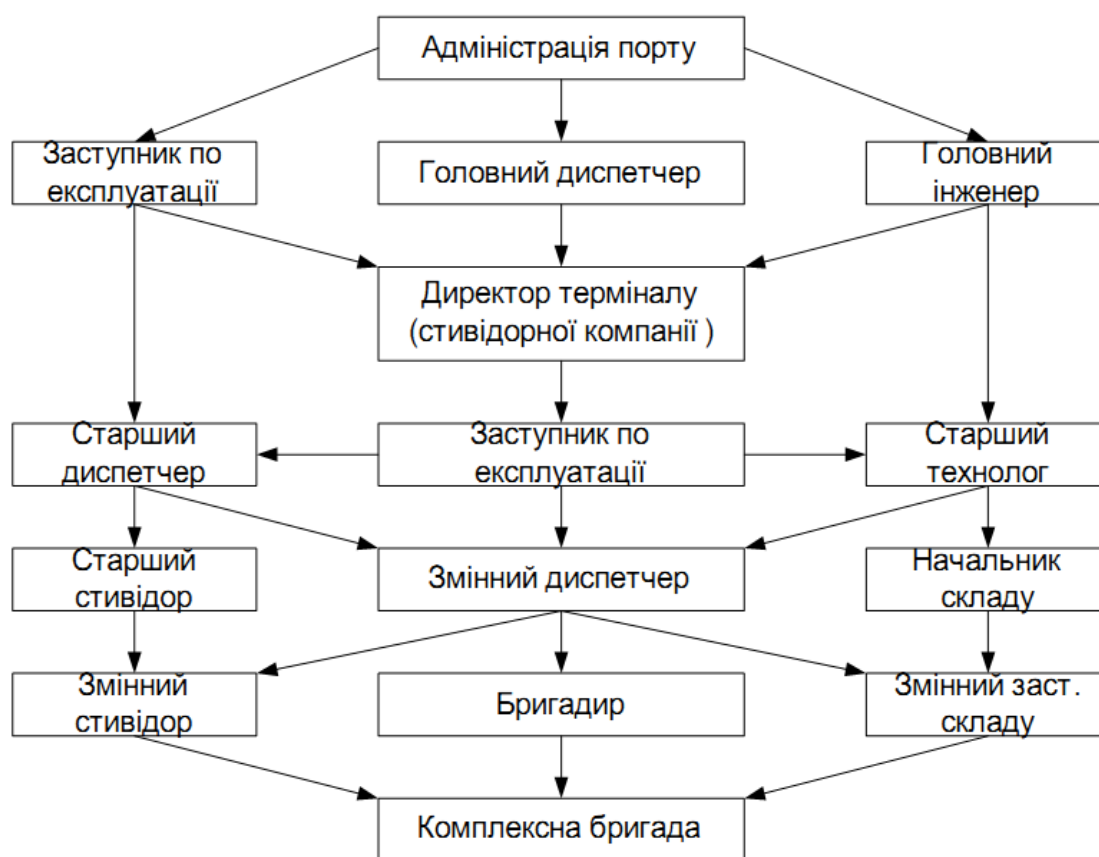


Рис. 5.5. Загальна схема управління вантажними роботами в порту [16]

Підставою для розробки технологічної схеми служить вивчення і техніко-економічне порівняння відомих технологічних рішень (типових і дослідницьких рекомендацій Міністерства інфраструктури України, вітчизняного і зарубіжного досвіду портів та інших підприємств, науково-дослідних і проектно-конструкторських робіт), а також винаходів і раціоналізаторських пропозицій. З'ясовують і оцінюють переваги й недоліки різ-

них варіантів технології, визначають можливі шляхи усунення недоліків. Критерії оцінки досконалості технології [17]:

- 1) ступінь механізації та автоматизації технологічного процесу;
- 2) продуктивність технологічної лінії;
- 3) виробіток на одного робітника або трудомісткість перевантаження однієї тонни вантажу;
- 4) витрата матеріалів, палива та електроенергії;
- 5) відповідність загальним тенденціям технічного прогресу на транспорті;
- 6) складність і тривалість підготовчо-заклучних операцій технологічного процесу, а також змісту передбачуваних технічних засобів у справному стані й готовності до роботи;
- 7) економічна ефективність із заданим вантажообігом;
- 8) виконання вимог безпеки праці та протипожежної безпеки;
- 9) забезпечення схоронності вантажу;
- 10) реальні можливості впровадження технології, виходячи з наявності потрібних будівельних споруд, перевантажувальної техніки, оснащення та персоналу відповідної кваліфікації, а також перспективи розвитку цих виробничих можливостей до потрібного рівня і в необхідні терміни.

Підйомно-транспортне обладнання обирають за технологічною характеристикою відповідно до розроблених технологічних схем і з урахуванням реальних можливостей порту. Технологічні схеми визначають схему механізації перевантажувального процесу, тобто набір підйомно-транспортного обладнання та послідовність його розташування і дії в складі технологічної лінії. Уточнення типів машин і вироблення технологічних вимог до них здійснюються за операціями, починаючи з основної з них – причальної, залежно від умов перевантажувального процесу, прийнятої технології та планування будівельних споруд.

Спеціальні причальні, складські, судові й вагонні підйомно-транспортні машини обирають за їх призначенням і відповідно до технологічних вимог, які визначаються умовами перевантажувального процесу.

Моделювання ієрархії управління вантажними роботами потребує розгляду технологічної мережі, що складається з декількох технологічних (виробничих) ліній, пов'язаних функціональними взаємодіями виконавців.

Перевезення зернових культур має сезонний характер. Це означає одноразове прибуття великої кількості автомобілів-зерновозів у порт з метою перевантаження. У зв'язку з цим виникають затримки обслуговування заявок і, як наслідок, черги з вантажних автомобілів протяжністю кілька кілометрів [18]. Тривалість очікування початку обслуговування в деяких випадках досягає 7–10 діб. Виникнення таких черг спричиняє низку негативних наслідків для всього регіону. Вантажні автомобілі перекривають одну зі смуг руху, виникають стихійні несанкціоновані стоянки на території міста й автотрасах.

Не можна не враховувати також погіршення екологічної обстановки, зниження пропускної здатності автомобільних доріг і створення аварійних

ситуацій. З метою покриття збитків транспортні компанії завантажують рухомий склад понад установлені нормативи. Це згубно позначається на дорожньому покритті, особливо з огляду на той факт, що перевезення зернових відбувається в найспекотнішу пору року.

### 5.3. Моделювання перевантажувальних процесів на вантажному терміналі

У праці побудовано та проаналізовано динамічну оптимізаційну модель системи обслуговування автомобільного транспорту на вантажному терміналі, що використовує методи теорії управління запасами. Для досягнення зазначеної мети ставляться такі завдання:

- формалізація опису функціонування портового терміналу як деякої динамічної багатофазної системи управління запасами;
- визначення параметрів управління задачі оптимізації;
- пошук умов, що обмежують можливі значення цих параметрів;
- визначення можливих критеріїв оптимальності в даній моделі;
- аналіз можливості практичної реалізації оптимізаційної моделі.

Припустимо, що на портовий термінал вантаж завозиться автомобілями для його подальшого навантаження на судна. Функціонування терміналу розглядається на горизонті планування  $T$ . Згідно з графіком прибуття суден на термінал, у періоді  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , планується прибуття суден під навантаження із сумарною чистою вантажопідйомністю  $g_t$ . Вантаж на термінал прибуває в автомобілях, з яких він вивантажується на склад для зберігання і подальшого навантаження на судна. Введемо такі умовні позначення:

$x_t$  – кількість вантажу, планованого до завезення на термінал у кінці періоду  $t$  в автомобілях;

$y_{1t}$  – кількість вантажу, вивантаженого з автомобілів на склад у періоді  $t$ ;

$y_{2t}$  – кількість вантажу, вивантаженого зі складу на судна в періоді  $t$ ;

$I_t$  – кількість вантажу, що перебуває на складі в кінці періоду  $t$ ;

$L_{1t}$  – сумарна чиста вантажопідйомність суден, що очікують навантаження, до кінця періоду  $t$ ;

$C$  – місткість складу на терміналі;

$q$  – початкова кількість вантажу на складі.

Параметри  $x_t$ ,  $y_{1t}$ ,  $y_{2t}$  є шуканими. Для їх обчислення сформулюємо оптимізаційну задачу, скориставшись методами теорії управління запасами [3, 19]. Динаміка зміни кількості вантажу на складі описується таким співвідношенням:

$$I_t = I_{t-1} + y_{1t} - y_{2t}, t = 1, 2, \dots, T; I_0 = q. \quad (5.4)$$

З (5.4) отримуємо:

$$I_t = q + \sum_{i=1}^t (y_{1i} - y_{2i}), t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.5)$$

Динаміка змінних  $L_{1t}$ , і  $L_{2t}$  аналогічним чином описується такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} L_{1t} &= L_{1,t-1} + x_t - y_{1t}, t = 1, 2, \dots, T; \\ L_{2t} &= L_{2,t-1} + g_t - y_{2t}, t = 1, 2, \dots, T. \end{aligned}$$

Звідси розраховуємо:

$$\begin{aligned} L_{1t} &= q_1 + \sum_{i=1}^t (x_i - y_{1i}), \\ L_{2t} &= q_2 + \sum_{i=1}^t (g_i - y_{2i}), t = 1, 2, \dots, T, \end{aligned} \quad (5.6)$$

де  $L_{10} = q_1, L_{20} = q_2$ .

Оскільки для будь-якого  $t$  має дотримуватись умова:

$$y_{2t} \leq I_{t-1}, t = 1, 2, \dots, T, \quad (5.7)$$

тобто в періоді  $t$  не може бути завантажено вантажу на судна зі складу більше, ніж його кількість на складі в кінці попереднього періоду, то маємо:

$$\sum_{i=1}^t (y_{1i} - y_{2i}) \leq C - q, t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.8)$$

З іншого боку,

$$y_{2t} \leq I_{t-1}, t = 1, 2, \dots, T,$$

або з урахуванням (5.7):

$$q + \sum_{i=1}^{t-1} y_{1i} \leq \sum_{i=1}^t y_{2i}, t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.9)$$

Далі аналогічно мають виконуватись умови:

$$y_{1t} \leq L_{1,t-1}, y_{2t} \leq L_{2,t-1}, t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.10)$$

З урахуванням співвідношень (5.10) впливають такі нерівності:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t y_{1i} &\leq q_1 + \sum_{i=1}^{t-1} x_i, \\ \sum_{i=1}^t y_{2i} &\leq q_2 + \sum_{i=1}^{t-1} g_i, t = 1, 2, \dots, T. \end{aligned} \quad (5.11)$$



На параметри управління  $x_t, y_{1t}, y_{2t}$  слід також накласти умову невід'ємності:

$$x_t, y_{1t}, y_{2t} \geq 0, \forall_t. \quad (5.12)$$

Зазначимо, що з обмежень (5.10) і (5.11) випливає, що для їх несуперечності має виконуватися умова  $q \leq q_2$ .

Для розв'язання різних задач з координації взаємодії транспортних потоків у транспортних вузлах зазвичай задають умови такої координації в тій чи іншій формі. За припущень і позначень, прийнятих вище, однією із зазначених умов може бути, наприклад, така:

$$q_1 + \sum_{t=1}^T x_t = q_2 + \sum_{t=1}^T g_t. \quad (5.13)$$

Умова (5.13) відображає наявність балансу завезеного на термінал і вивезеного з нього вантажу на горизонті планування (з урахуванням початкових значень для вантажу у вагонах і чистих вантажопідйомностей суден). Воно базується на припущенні, що відомі точні значення величин  $g_t$ , що не завжди має місце. Найчастіше зазначені величини є наближеними, очікуваними оцінками реальних значень чистих вантажопідйомностей суден.

У такій ситуації, якщо  $g_t$  вважати випадковими величинами з відомими законами розподілу, то рівність (5.13) можна замінити менш суворою умовою:

$$M \left[ \sum_{t=1}^T (x_t - g_t) + q_1 - q_2 \right]^2 \rightarrow \min,$$

де  $M$  – символ математичного очікування.

Слід також зазначити, що сформульована задача оптимізації ґрунтується на припущенні, що пропускна спроможність терміналу визначається тільки обмеженням місткості складу. Тобто передбачається, що на терміналі є така кількість засобів механізації та докерів-механізаторів, яка достатня для забезпечення вивантаження вантажу з автомобілів і навантаження його на судна, що прибувають у плановому періоді, без додаткових простоїв в очікуванні звільнення фронтів навантаження-вивантаження.

Як цільову функцію даної задачі візьмемо сумарний прибуток портового оператора. Запишемо явний вираз для цього прибутку, ввівши попередньо такі умовні позначення:

$a_{1t}$  – ставка оплати за вивантаження 1 т вантажу з автомобілів на склад у періоді  $t$ ;

$a_{2t}$  – ставка оплати за навантаження 1 т вантажу зі складу на судно в періоді  $t$ ;



$c_t$  – вартість зберігання 1 т вантажу на складі зернового терміналу в періоді  $t$ ;

$e_{1t}$  – експлуатаційні витрати оператора під час вивантаження 1 т вантажу з автомобілів на склад у періоді  $t$ ;

$e_{2t}$  – експлуатаційні витрати оператора під час навантаження 1 т вантажу зі складу на судно;

$d_{1t}$  – вартість простою 1 т вантажопідйомності поїзда в періоді  $t$ ;

$d_{2t}$  – вартість простою 1 т чистої вантажопідйомності судна в періоді  $t$ .

У прийнятих позначеннях повний прибуток термінального оператора становитиме:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \sum_{t=1}^T (p_{1t}y_{1t} + p_{2t}y_{2t} - c_t I_t) = \\
 &= \sum_{t=1}^T \left\{ p_{1t}y_{1t} + p_{2t}y_{2t} - c_t \left[ g + \sum_{i=1}^t (y_{1i} - y_{2i}) \right] \right\}, \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

де  $p_{1t} = a_{1t} - e_{1t}$ ;  $p_{2t} = a_{2t} - e_{2t}$ .

Таким чином, ми дійшли до наступної задачі лінійного програмування: мінімізувати функцію (5.14) за умов (5.11)–(5.13).

Оскільки вантажний термінал є однією з ланок транспортно-логістичного ланцюга, то з логістичного погляду викликає інтерес оцінка всіх витрат, включаючи не лише витрати оператора терміналу, але й транспортних підприємств і фрахтувальника за простій транспортних засобів. Ці витрати визначаються такими виразами:

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{t=1}^T (e_{1t}y_{1t} + e_{2t}y_{2t} + c_t I_t + d_{1t}L_{1t} + d_{2t}L_{2t}) = \\
 &= \sum_{t=1}^T \left\{ e_{1t}y_{1t} + e_{2t}y_{2t} + c_t \left[ q + \sum_{i=1}^t (y_{1i} - y_{2i}) \right] + d_{1t} \left[ q_1 + \sum_{i=1}^t (x_i - y_{1i}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + d_{2t} \left[ q_2 + \sum_{i=1}^t (g_i - y_{2i}) \right] \right\}. \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

У даному випадку виникає типова для логістичного менеджменту ситуація суперечності між комерційними інтересами вантажоодержувача або логістичного оператора (мінімізація виразу (5.15) й окремої ланки у вигляді оператора портового терміналу (максимізація вираження (5.14)).

У принципі можна сформулювати таку бікритеріальну задачу оптимізації: знайти значення змінних  $x_t$ ,  $y_{1t}$ ,  $y_{2t}$ , що задовольняють умови (5.7)–(5.13), і умов невід’ємності, які б одночасно забезпечували максимальне значення функції (5.14) і мінімальне значення функції (5.15).

Цю бікритеріальну задачу лінійного програмування можна розв'язати відомими методами розв'язування такого роду задач, наприклад методом послідовних поступок або методом згортання критеріїв [20, 21].

Розглянемо числовий приклад для наведеної вище оптимізаційної задачі, обмежившись випадком  $T = 2$ . У даному випадку маємо 6 шуканих змінних  $x_1, x_2, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ .

Будемо варіювати лише параметри  $g_1, g_2$  (тобто чисті вантажопідйомності суден), залишивши незмінними значення всіх інших вихідних параметрів (табл. 5.1). При цьому скористаємося пакетом програм Microsoft Excel.

Таблиця 5.1

**Вихідні дані для розв'язування оптимізаційної задачі**

Умовне позначення	Числове значення	Умовне позначення	Числове значення
$C$	50 тис. т	$c_2$	0,015 тис. грош. од./т на добу
$q$	5 тис. т	$p_{11}$	1,0 тис. грош. од./т
$q_1$	1 тис. т	$p_{12}$	1,2 тис. грош. од./т
$q_1$	8 тис. т	$p_{21}$	1,6 тис. грош. од./т
$c_1$	0,012 тис. грош. од./т на добу	$p_{22}$	2,0 тис. грош. од./т

Результати розрахунків подано в табл. 5.2. З цієї таблиці видно, що оптимізаційна модель дає цілком прийнятні з практичного погляду результати. Зокрема, як і слід було очікувати, зі зростанням сумарної чистої вантажопідйомності суден відповідно зростають і розміри підвезення вантажу автомобільним транспортом у першому періоді, а також очікується, що відповідно зростає і сумарний прибуток оператора вантажного терміналу, на якому відбувається взаємодія видів транспорту.

Таблиця 5.2

**Результати розв'язування задачі оптимізації плану надходження автомобілів під вивантаження і перевантаження вантажу**

Умовні позначення	$g_1 = 15$ тис. т $g_2 = 20$ тис. т	$g_1 = 15$ тис. т $g_2 = 20$ тис. т	$g_1 = 15$ тис. т $g_2 = 20$ тис. т	$g_1 = 15$ тис. т $g_2 = 20$ тис. т
$x_1$	42	52	60	75
$x_2$	0	0	2	12
$y_{11}$	0	0	0	0
$y_{12}$	5	5	5	5
$y_{21}$	50	60	68	83
$Y_{22}$	18	18	18	33
$\max P$ , тис. грош. од.	121,52	137,37	150,05	204,05

Для моделювання системи обслуговування автомобільного транспорту на зерновому терміналі прийнято такі умови:

1. Автомобільний транспорт обслуговується в порту «Південний» 24 години на добу.

2. За результатами статистичних досліджень встановлено, що прибуття автомобілів на зерновий термінал має випадковий характер і описується законом Пуассона з інтенсивністю  $\lambda_a = 5$  автомобілів на годину.

3. Коливання тривалості виконання операцій з обробки автомобільного транспорту (реєстрація на КПП, експрес-аналіз, зважування, розвантаження) описуються нормальним законом розподілу, з параметрами  $\bar{t}_0$  – математичне сподівання і  $\sigma_0$  – середнє квадратичне відхилення.

Значення даних параметрів з кожної операції обробки ТЗ наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

**Параметри нормального закону розподілу для кожної операції обробки автомобільного транспорту**

№ з/п	Операція	Параметри нормального закону розподілу			
		Математичне сподівання		Середнє квадратичне відхилення	
		Умовне позначення	Значення, хв	Умовне позначення	Значення, хв
1	Реєстрація на КПП	$\bar{t}_{рег}$	10	$\delta_{рег}$	2
2	Експрес-аналіз зерна	$\bar{t}_{ЕА}$	10	$\delta_{ЕА}$	1,5
3	Зважування до розвантаження	$\bar{t}_{зв з вант}$	5	$\delta_{зв з вант}$	1,2
4	Розвантаження	$\bar{t}_{роз}$	30	$\delta_{роз}$	7
5	Зважування після розвантаження	$\bar{t}_{за без вант}$	5	$\delta_{зв без вант}$	1
6	КПП на виїзді	$\bar{t}_{КПП}$	5	$\delta_{КПП}$	1,1

Розглянемо розрахункові результати, отримані під час функціонування моделі обслуговування автомобілів на зерновому терміналі в ході організації роботи за такими режимами:

1. Режим роботи терміналу, за якого немає управлінського впливу (випадковий вибір пунктів обслуговування).

2. Режим роботи, за якого автомобілі в порядку черги направляються до пунктів обслуговування № 1 або № 2 (у порядку черги).

3. Режим роботи терміналу, за якого реалізується автоматизоване управління автомобільним транспортом у реальному часі.

Для того щоб визначити, яким чином режим роботи терміналу впливає на сумарний час очікування автомобілями обробки, складемо зведену табл. 5.4. У ній наведемо основні результати, отримані під час моделювання кожного з трьох режимів роботи зернового терміналу.

Таблиця 5.4

**Зведені дані про роботу вантажного терміналу  
в кожному з трьох режимів за добу**

№ з/п	Пункт обслуговування	Сумарний час очікування автомобілями обслуговування (за добу), хв		
		Випадковий вибір	Почерговий вибір	Автоматизоване управління
1	Реєстрація на КПП	1586	1586	1586
2	Експрес-аналіз зерна	446	446	446
3	Зважування до розвантаження	0	0	0
4	Розвантаження	3014	2009	1875
5	Зважування після розвантаження	57	85	75
6	КПП на виїзді	18	24	14
Усього:		5121	4150	3996
Кількість обслужених ТЗ		95	99	101

Спираючись на результати праці [22], можна стверджувати, що за нерегульованого підведення часто має місце очікування автомобілями початку обслуговування внаслідок зайнятості вантажної секції, яку випадковим чином обрав водій. При цьому в окремих випадках інша секція складу або вільна, або звільняється раніше, ніж секція, обрана водієм автомобіля.

Таким чином, на основі даних про поточний стан перевантаження зерна у вантажному терміналі порту «Південний» можна регулювати вибір каналу обслуговування (секції) кожним автомобілем-зерновозом. У разі регульованого підведення автомобілів кожен наступний автомобіль направляється до вільної секції зернового терміналу або до тієї, де обслуговування автомобіля закінчиться раніше. Проаналізувавши сумарний час очікування автомобілями обробки за всіма операціями, можна зробити висновок про доцільність упровадження режиму регулювання.

Щоб уникнути хаотичного прибуття автомобілів на термінал, у даній праці пропонується впровадження алгоритму, згідно з яким система попередньої реєстрації сама визначає оптимальний інтервал прибуття автомобілів. Обґрунтувати необхідність запровадження такого алгоритму допоможе аналіз впливу інтервалів прибуття автомобілів на зерновий термінал ( $I_i$ ) на добову тривалість очікування обслуговування ( $t_{ож}$ ) за всіма операціями обробки ТЗ (табл. 5.5).

Розглядати залежність зміни інтервалу та час очікування за кожною операцією окремо недоцільно, оскільки черга на обслуговування має тенденцію переміщатися від одного пункту до іншого. Якщо на першому пункті проблему очікування обробки вже розв'язано, черга може переміститися на другий пункт і т. д.

У праці було порівняно сумарне очікування автомобілями обслуговування за добу, залежно від інтервалу їх прибуття на зерновий термінал. Значення табл. 5.5 були отримані шляхом десятиразового прогону імітаційної моделі [20] за кожним інтервалом прибуття ( $I_i$ ). Після цього було розраховано середнє значення за кожною шуканою величиною. Це значення і занесено у таблицю.

Сумарна тривалість очікування транспортними засобами (ТЗ) обробки має тенденцію змінюватись. Вона залежить від загального набору і послідовності вантажів, що прибувають на термінал для обробки. Якщо в кількох автомобілях поспіль є пшениця, пункти розвантаження № 1 і № 2 не встигають обробляти заявки. Хоча ячмінь та соняшник прибувають на термінал рідше, виникають ситуації прибуття двох або навіть трьох автомобілів поспіль із цим вантажем. У такому випадку очікування виникає вже на пунктах № 3 і № 4. Замість  $I_i$  у розрахунку були використані фіксовані інтервали прибуття транспортних засобів від 5 до 20 хвилин, з кроком 1 хвилина.

Таблиця 5.5

**Результати розрахунку середнього часу очікування автомобілями обслуговування на вантажному терміналі**

Інтервал прибуття ТЗ, хв	Сумарний час очікування, хв	Кількість ТЗ, що прибули	Кількість ТЗ, що були обслужені	Середній час очікування одного ТЗ, хв
5	228 073	289	131	789
6	128 098	241	132	532
7	77 124	207	128	373
8	39 926	181	130	221
9	21 583	161	129	134
10	8444	145	128	58
11	1785	132	123	13,5
12	1321	121	112	11
13	797	112	104	7
14	555	104	97	5
15	295	97	91	3
16	238	91	85	2,6
17	229	86	80	2,7
18	142	81	76	1,8
19	108	77	72	1,4
20	73	73	68	1

У ході визначення залежності сумарного часу очікування за добу від інтервалу прибуття вантажних автомобілів на вантажний термінал виявлено такі тенденції:

1. Зі збільшенням інтервалу надходження автомобілів на термінал істотно скорочується сумарний час очікування обслуговування (рис. 5.6).

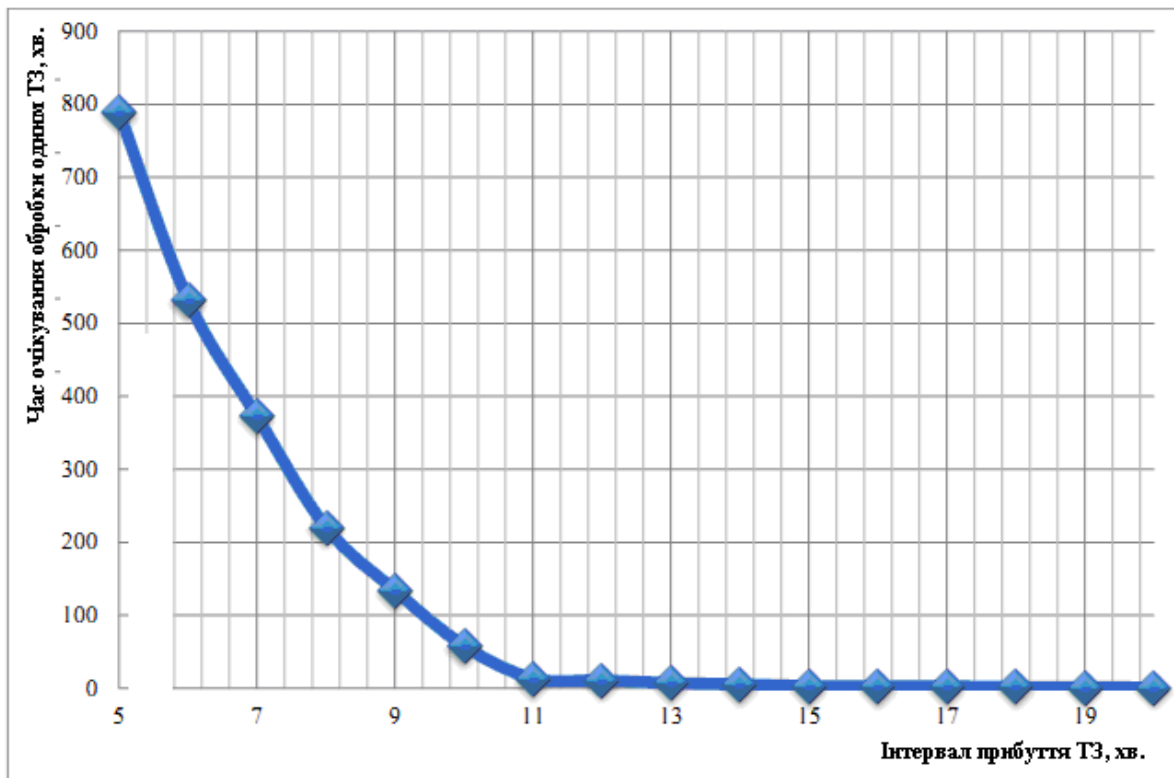


Рисунок 5.6. Залежність середнього  $t_{oc}$  обробки від величини інтервалу прибуття автомобілів на термінал

Дану залежність найбільш доцільно розглядати щодо середнього часу очікування, що припадає на один автомобіль, оскільки кількість прибулих ТЗ варіюється від 73 до 289.

2. Зі зменшенням інтервалу прибуття ТЗ на термінал кількість прибулих автомобілів істотно зростає і в інтервалі 5–9 хвилин значно перевищує кількість обслугованих ТЗ (рис. 5.7). Черга з ТЗ, які очікують обробки на кожному з інтервалів прибуття, зображена на рис. 5.8.

3. Кількість обслугованих автомобілів несуттєво варіюється з інтервалом прибуття автомобілів від 5 до 10 хвилин. Це пов'язано з тим, що в цьому інтервалі прибуття термінал обробляє максимально можливу кількість транспортних засобів. Навіть якщо інтервал скорочувати й далі, кількість оброблених за добу транспортних засобів не збільшиться, оскільки проектна потужність терміналу завантажена повністю.

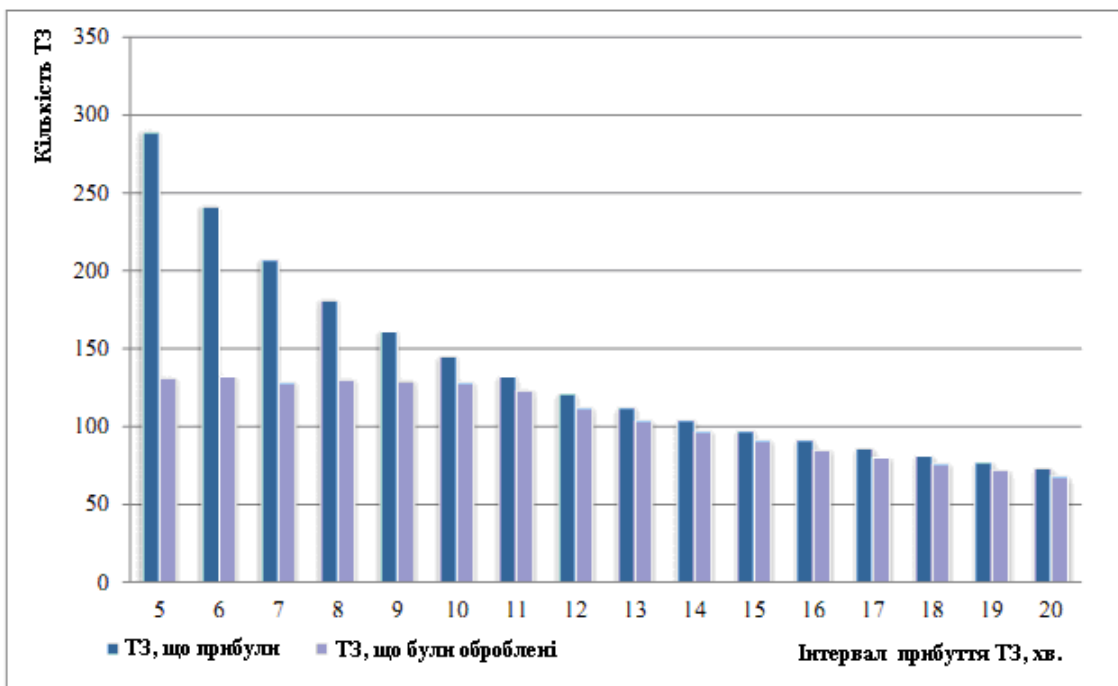


Рис. 5.7. Кількість прибулих і оброблених на терміналі ТЗ залежно від інтервалу прибуття

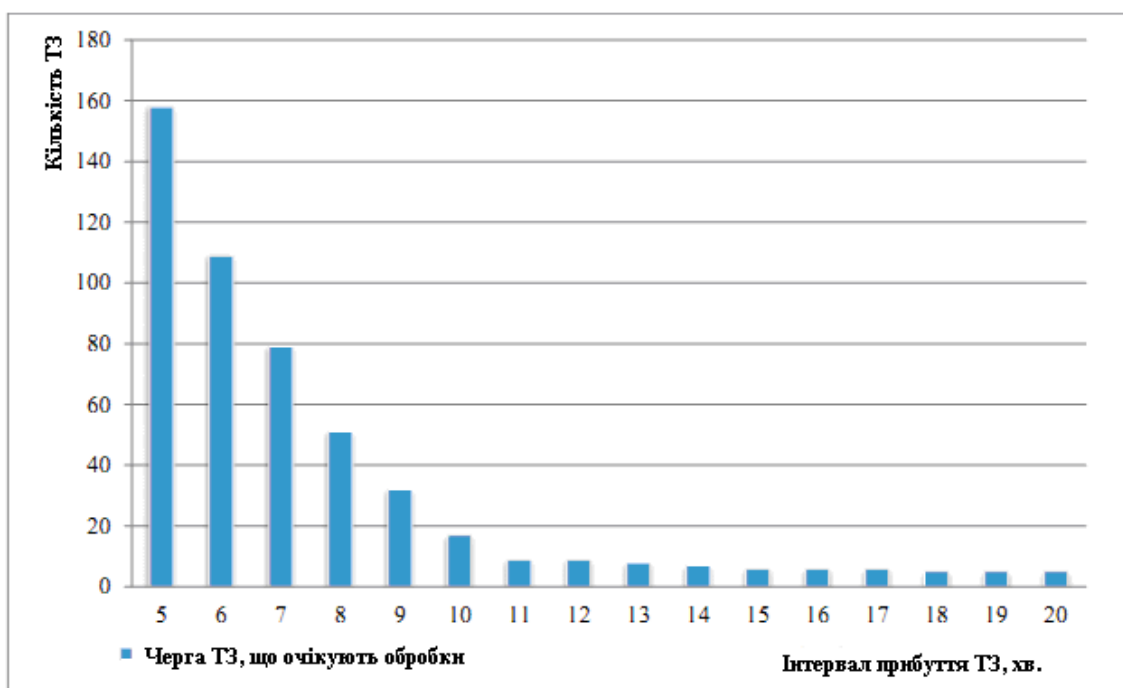


Рис. 5.8. Величина черги з ТЗ, які очікують обробки

4. Зі зміною інтервалу прибуття від 10 до 20 хвилин кількість обслугованих автомобілів залишається меншою, ніж кількість прибулих, навіть не дивлячись на те, що проєктна потужність терміналу використовується не повністю. Це пов'язано з тим, що навіть якщо автомобілі прибувають на термінал кожні 20 хвилин, середня тривалість операції розвантаження змінюється несуттєво і становить у середньому 30 хв.

Отже, пункт розвантаження не завжди встигає обслужити автомобілі без очікування. Таким чином, проаналізувавши отримані результати імітаційного моделювання, можна зробити висновок, що для скорочення часу очікування автомобілями обслуговування необхідно визначити оптимальний інтервал прибуття ТЗ на термінал.

Визначення оптимального інтервалу прибуття вантажних автомобілів на термінал залежить від кількості обслугованих ТЗ і сумарного часу очікування від інтервалу прибуття на одному графіку (рис. 5.9). Щоб наочніше відобразити той інтервал прибуття, під час якого настає суттєвий перелом і в кількості оброблених автомобілів, і в сумарному часі очікування, обидві залежності нанесені на одну систему координат. На осі абсцис відкладалися інтервали прибуття автомобілів на термінал, виражені у хвилинах (відповідно до табл. 5.5). Для наочності даного графіка використовувалися дві осі ординат. На лівій осі ординат відкладався сумарний час очікування обробки, в розрахунку на один транспортний засіб за добу (у хвилинах). На правій осі ординат відкладалася кількість обслужених автомобілів.

Оскільки величини, що відкладаються на осях ординат, виражаються в різних одиницях виміру, перетин графіків не може що-небудь означати в даному випадку. Графік зміни часу очікування обробки за добу (залежно від інтервалу прибуття автомобілів) зображено на рис. 5.9 літерами AD.

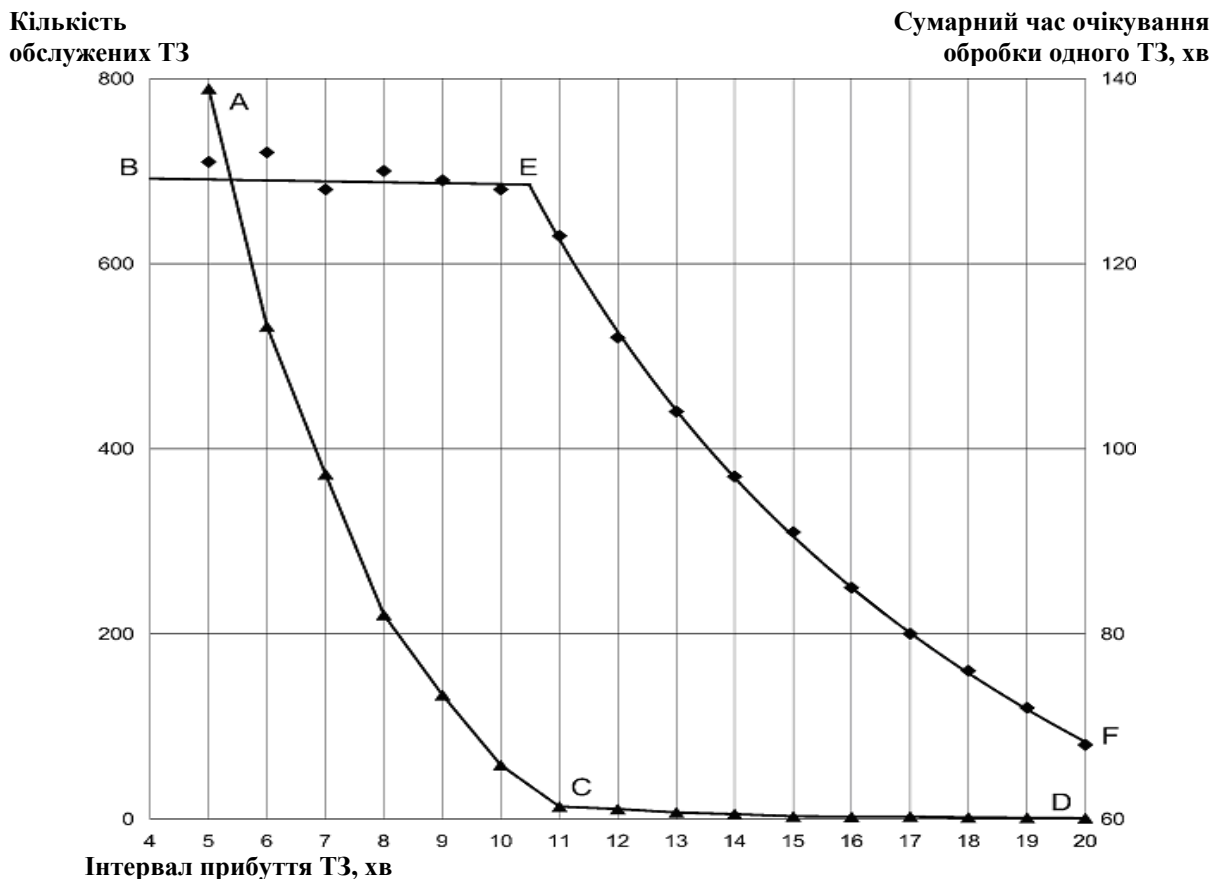


Рис. 5.9. Вплив інтервалу прибуття автомобілів на сумарний час очікування і на кількість обслужених транспортних засобів за добу



Умовні позначення:

- ▲—▲—▲— — графік зміни часу очікування автомобілями обробки за добу;  
—■—■—■— — графік зміни кількості обслугованих автомобілів за добу.

Графік зміни кількості обслугованих автомобілів за добу (залежно від інтервалу прибуття) позначено BF. Графіки AD і BF побудовані за даними табл. 5.5.

Далі була проведена апроксимація. Виявлено функціональні залежності, що описують графіки. Графік AD поділено на дві ділянки:

1) AC – описується функцією полінома четвертого ступеня:

$$y = 4671,1 - 1523,25 * x + 212,64 * x^2 - 14,68 * x^3 + 0,4 * x^4.$$

2) CD – описується лінійною функцією:

$$y = -1,3 * x + 25,1.$$

Графік BF також ділиться на дві ділянки:

1) BE – описується лінійною функцією:

$$y = -0,1 * x + 129,6.$$

2) EF – описується функцією:

$$\ln y = -0,98 * \ln x + 7,156.$$

Аналізуючи подані графіки, можна зазначити:

1. Середній час очікування обробки різко зменшується зі збільшенням інтервалу. Після досягнення на осі абсцис значення 11 хв воно стає незначним.

2. Кількість обслугованих автомобілів залишається практично незмінною зі зміною інтервалу прибуття від 5 до 10 хвилин. На рівні 10,5 хвилин кількість обслугованих автомобілів починає різко скорочуватися.

Таким чином встановлено, що оптимальний інтервал прибуття автомобілів на зерновий термінал (згідно з розрахунками) розташовується в проміжку між десятьма хвилинами (рубіжне значення максимальної спроможності терміналу) й одинадцятьма хвилинами (час очікування автомобілями обробки близький до мінімального).

Розглянемо основні показники роботи зернового терміналу до й після впровадження методики підвищення рівня автотранспортного обслуговування (табл. 5.6).

**Порівняння основних характеристик роботи вантажного терміналу**

№ з/п	Показник	Результат роботи терміналу до впровадження методики	Результат роботи терміналу після впровадження методики
1	Кількість заявок ТЗ на обслуговування за добу	111	145
2	Кількість обслужених ТЗ на добу	95	128
3	Середній час обслуговування одного ТЗ (без урахування часу очікування), хв	95	80
4	Рівень автотранспортного обслуговування, %	72	97

Для оцінки ступеня підвищення рівня автотранспортного обслуговування розрахуємо рівень автотранспортного обслуговування вантажного терміналу ( $\eta$ ) за формулою:

$$\eta = \frac{m}{M} * 100\%, \quad (5.16)$$

де  $m$  – кількість фактично обслужених автотранспортних засобів;

$M$  – теоретично можлива кількість автотранспортних засобів, що може бути обслужена на вантажному терміналі.

Виходячи з поданої формули, рівень автотранспортного обслуговування до впровадження методики ( $\eta_{\text{базовий}}$ ) становив:

$$\eta_{\text{базовий}} = \frac{95\text{авт.}}{132\text{авт.}} * 100\% = 72\%.$$

У разі впровадження методики підвищення рівня автотранспортного обслуговування зернового терміналу очікуваний рівень обслуговування становитиме:

$$\eta_{\text{плановий}} = \frac{128\text{авт.}}{132\text{авт.}} * 100\% = 97\%.$$

Планове очікуване підвищення рівня обслуговування становитиме 25 %. Проаналізувавши зміну основних характеристик роботи зернового

терміналу порту «Південний» унаслідок упровадження методики підвищення рівня автотранспортного обслуговування за рахунок упровадження результатів моделювання системи обслуговування автомобільного транспорту на вантажному терміналі, можна говорити про виправданість цього впровадження і позитивні аспекти для всіх учасників транспортно-логістичного ланцюга:

- керівництво зернового терміналу порту: підвищення прибутку порту за рахунок збільшення кількості обслугованих заявок на 33 автомобілі на добу, підвищення рівня автотранспортного обслуговування на 25 %;

- власники автомобільного транспорту: зменшення тривалості як самого обслуговування, так і очікування його початку;

- керівництво регіону: скорочення черг вантажних автомобілів поблизу терміналів і, як наслідок, поліпшення екологічної обстановки в прилеглому до порту регіоні.

У результаті аналізу роботи імітаційної моделі обслуговування автомобілів за різних режимів функціонування зернового терміналу порту «Південний» виявлено, що найменший сумарний час очікування автомобілями обробки демонструє режим роботи терміналу, за якого реалізується автоматизоване управління автомобільним транспортом у реальному часі. Отримане в результаті зменшення часу очікування на добу становить 1125 хв порівняно з режимом випадкового вибору пунктів обслуговування і 154 хв у порівнянні з почерговим режимом.

Установлено очікуване підвищення прибутку порту за рахунок збільшення кількості обслугованих заявок на 33 автомобілі на добу, підвищення рівня автотранспортного обслуговування на 25 %.

Використання автомобільного транспорту у взаємодії з морським, особливо у форматі міжконтинентальних перевезень негабаритних вантажів у прямому змішаному автомобільно-водному сполученні, застосовується здебільшого для забезпечення доставки та перевезення між транспортним вузлом і складами відправника й одержувача. Наявність перевантажувальних робіт між видами транспорту створює додаткове навантаження на вартість доставки, але цей варіант залишається в загальному плані найефективнішим і щодо організації доставки, і щодо сумарної вартості перевезення [23].

З метою визначення перспектив подальших пошуків у даному напрямі обґрунтовано необхідність визначення оптимального фіксованого інтервалу прибуття автомобілів на вантажний термінал. Цей показник може бути розрахований двома способами: шляхом порівняння залежностей сумарного очікування обслуговування і кількості оброблених автомобілів від інтервалу прибуття та шляхом зіставлення витрат автомобільного транспорту і витрат порту.

Наведений вище підхід для формалізації процесу взаємодії потоку суден і вантажних автомобілів у порту «Південний», який ґрунтується на використанні імітаційного моделювання та методів теорії управління запасами, може бути впроваджений у роботу інших вантажних терміналів та дає змогу визначити оптимальну стратегію логістичного оператора в частині узгодженого плану взаємодії різних видів транспорту.

#### Список використаних джерел:

1. Марковская О. В. Повышение эффективности смешанных перевозок внешнеторговых грузов : дисс. ... канд. эконом. наук : 08.00.05 / Марковская О. В. ; Институт управления на транспорте. – М., 2001. – 191 с.
2. Герами В. Д. Управление транспортными системами. Транспортное обеспечение логистики [Електронний ресурс] : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Д. Герами, А. В. Колик. – М. : Юрайт, 2015. – 510 с. – Режим доступа : [https://stud.com.ua/23400/logistika/avtotransportni\\_terminali](https://stud.com.ua/23400/logistika/avtotransportni_terminali)
3. Истратов М. А. Повышение эффективности управления перегрузочными процессами в морском порту : дисс. ... канд. тех. наук : 05.22.19 / Истратов М. А. ; ФГБОУ ГПО «Мурманский государственный технический университет». – Мурманск, 2015. – 198 с.
4. Мурад'ян А. О. Методичні основи узгодженого управління процесом перевалки вантажів у загальнотранспортних вузлах : дис. ... канд. тех. наук : 05.22.01 / Мурад'ян А. О. ; Одеський національний морський університет. – Одеса, 2016. – 166 с.
5. Троицкая Н. А. Организация перевозок специфических видов грузов : учебное пособие / Н. А. Троицкая, М. В. Шилимов. – 2-е изд., испр. – М. : КНОРУС, 2019. – 240 с.
6. Крук Ю. Ю. Методи адаптивного управління діяльністю оператора портового терміналу : дис. ... канд. тех. наук (доктора філософії) : 05.22.01 / Крук Ю. Ю. ; Одеський національний морський університет. – Одеса, 2017. – 179 с.
7. Управление морским портом : научно-практическое издание / Г. Б. Вилюнский, И. Н. Гончаров, Ю. Ю. Крук, Е. Д. Крушкин. – Одесса : Феникс, 2010. – 428 с.
8. Вороной В. Зерно и порты: что стоит на пути экспортного потенциала [Електронний ресурс] / Вороной В. ; Інформація державного підприємства «Адміністрація морських портів України». – Режим доступу : <http://www.uspa.gov.ua/ru/press-tsentr/analitika/analitika-2016>
9. Вернигора Р. В. Аналіз сучасних проблем ефективної взаємодії залізниць та морських портів України [Електронний ресурс] / Р. В. Вернигора, О. О. Золотаревська // Транспортні системи та технології перевезень. – 2021. – Вип. 21. – С. 49–59. – Режим доступу : <http://eadnurt.diit.edu.ua/bitstream/123456789/14121/1/Vernyhora%20.pdf>

10. Горбачов М. Чи достатньо портових терміналів? [Електронний ресурс] / Горбачов М. ; Інформація державного підприємства «Адміністрація морських портів України». – Режим доступу : <https://agropolit.com/spetsproekty/317-vuzke-gorlechko-ukrayinskih-portiv-abo-yak-ne-zgnoyiti-rekordni-vrojaji>

11. Полный анализ: экспорт украинского зерна в цифрах и названиях [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://usm.media/eksport-ukrainskogo-zerna-v-czifrah-top-liderov-perevalki>

12. Огляд вантажопотоків морського порту «Південний». Зернові вантажі [Електронний ресурс] : веб-сайт. – Режим доступу : <http://yuz-usra.com.ua/2017/03/10/огляд-вантажопотоків-морського-порт>

13. У порту «Південний» офіційно відкрито зерновий термінал MV Cargo [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://logist.fm/news/u-portu-pivdeniiy-oficiyno-vidkrito-zernoviy-terminal-mv-cargo>

14. Кузьменко А. І. Підвищення ефективності взаємодії морського та автомобільного транспорту / А. І. Кузьменко // Системи та технології. – 2016. – № 2 (55/1). – С. 25–46.

15. Кузьменко А. І. Моделювання процесів взаємодії різних видів транспорту на території складських комплексів / А. І. Кузьменко, М. С. Багно, М. В. Старостенко // Сучасні методики інновації та досвід практичного застосування у сфері технічних наук : зб. тез доп. між нар. наук.-практ. конференції, м. Люблін, Республіка Польща, 27–28 грудня 2017 р. Люблін, 2017. – С. 67–82.

16. Ветренко Л. Д. Организация и технология перегрузочных процессов в морских портах : учебник для вузов / Л. Д. Ветренко, В. З. Анянина, А. В. Степанец. – М. : Транспорт, 1989. – 270 с.

17. Магамадов А. Р. Управление портами (оргструктуры и маркетинг) : конспект лекцій / А. Р. Магамадов, П. А. Макушев. – Одесса : ИПК водного транспорта, 1992. – 92 с.

18. Веремеенко Е. Г. Повышение уровня автотранспортного обслуживания зернового терминала порта : дисс. ... канд. тех. наук : 05.22.08 / Веремеенко Е. Г. ; ФГБОУ ВО «Донской государственной технической университет» (ДГТУ). – Ростов-на-Дону, 2016. – 151 с.

19. Белецкий Ю. В. Анализ системы взаимодействия различных видов транспорта на основе формирования транспортно-логистических цепей при мультимодальных перевозках / Ю. В. Белецкий, Н. В. Мирошникова, А. В. Сергиенко // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – 2015. – № 1 (218). – С. 210–212.

20. Зильдман В. Я. Взаимодействие встречных транспортных потоков, имеющих пуассоновский характер при отсутствии регулирования / В. Я. Зильдман, Г. В. Поддубный // Экономика и математические методы. – 1977. – Т. XIII. – Вып. 3. – С. 524–535.

21. Давідич Ю. О. Моделювання транспортних систем [Електронний ресурс] : конспект лекцій (для магістрів усіх форм навчання спеціальності 275 «Транспортні технології») / Ю. О. Давідич, Г. І. Фалецька. – Х. : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 72 с. – Режим доступу : [http://eprints.kname.edu.ua/51057/1/2017%20%D1%80%D0%B5%D0%BF%D0%BE%D0%B7%20145%D0%9B\\_%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82\\_%D0%9C%D0%A2%D0%A1.pdf](http://eprints.kname.edu.ua/51057/1/2017%20%D1%80%D0%B5%D0%BF%D0%BE%D0%B7%20145%D0%9B_%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82_%D0%9C%D0%A2%D0%A1.pdf)

22. Огороков А. М. Дослідження взаємодії автомобільного та річкового транспорту на портовому терміналі методами імітаційного моделювання / А. М. Огороков, Р. В. Вернигора, А. І. Кузьменко // Транспортні системи та технології перевезень. Збірник наукових праць ДНУЗТ ім. акад. В. Лазаряна. – 2020. – Вип. 20. – С. 51–59.

23. Мельник О. М. Технологічні аспекти перевезення негабаритних вантажів. Транспортно-технологічне забезпечення процесів доставки та обробки негабаритних вантажів / О. М. Мельник // Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського. Серія: технічні науки. – 2020. – Том 31 (70). – Ч. 2. – № 2. – С. 168–174.

**Наукове видання**

За редакцією д.т.н., проф. А. В. Сохацького

**МОДЕЛЮВАННЯ  
В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ  
ЧАСТИНА І**

Монографія

Редактори: *Т. П. Дерев'янка, О. О. Смирнова*  
Комп'ютерна верстка: *О. О. Іщенко*

**Підписано до друку 22.02.2022. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.  
Ум. друк. арк. 11,38. Облік.-вид. арк. 10,11. Тираж 100 прим.  
Замовлення № 48.  
Дніпро: Університет митної справи та фінансів (свідоцтво про  
видавничу діяльність ДК № 6198 від 24.05.2018 р.).  
49000, м. Дніпро, вул. Володимира Вернадського**