УДК 519.6: 533.6: 629.7
DOI https://doi.org/10.32782/2521-6643-2025-1-69.4

Сохацький А. В., доктор технічних наук, професор, професор
кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики
Інституту транспортних систем та технологій
Національної академії наук України
Університету митної справи та фінансів
ORCID: 0000-0002-3593-6517

ДЕЯКІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ НАВКОЛО ТРАНСПОРТНИХ АПАРАТІВ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТІВ

Обтікання транспортних засобів турбулентним потоком уявляє собою складну нелінійну динамічну систему. Для дослідження цих складних нелінійних систем реалізовують певні методологічні підходи. Ці підходи повинні будуватися на основі об'єктивних фізичних законів, що описують поведінку динамічної системи. В результаті аналізу досліджуваних процесів необхідно виявити їх закономірності та розробити їх опис.

Математичне моделювання таких нелінійних динамічних систем є міждисциплінарним інструментом дослідження різноманітних фізичних процесів. Проблеми моделювання розвиненої турбулентності залишаються відкритими. Єдиного механізму переходу до турбулентного хаосу в різних типах гідродинамічних течій наразі ще не знайдено. У розвиненому турбулентному потоці присутні пульсації з масштабами від найбільших до дуже малих. На сьогодні відомі чотири механізми переходу ламінарної течії до турбулентної при досягненні числом Рейнольдса критичного значення. Вважається, явище турбулентності в певній мірі пов'язано з хаосом.

Вичерпної теорії виникнення турбулентності в різноманітних аеродинамічних течіях на сьогодні взагалі немає. На сьогодні запропоновано ряд сценаріїв розвитку турбулентних течій, оснований на процесах хаотизації руху. Це наступні сценарії: оснований на уявленні про ієрархію квазіперіодичних рухів; процес хаотизації руху рідини Рюеля-Такенса; перехід до турбулентного хаосу через послідовність біфуркацій подвоєння періоду; перехід до турбулентності через переміжуваність. Ці підходи зародилися в результаті досліджень модельних систем турбулентних течій та їх аналізу з використанням диференціальних рівнянь. Їх математичний опис є надзвичайно складним і потребує подальшого розвитку.

Для числового розв'язування задачі з розрахунку характеристик турбулентної течії навколо наземного транспортного засобу обрано модель течії в'язкого стисливого газу, що описується осередненими за Рейнольдом рівняннями Нав'є-Стокса. Розрахункова область навколо транспортного апарата є складною, тому доцільно використовувати багатоблоковий підхід та криволінійну систему координат. Розроблено методику, побудовано алгоритм та написано коди комплексу програмного забезпечення на мові Fortran-95.

Шляхом числового розв'язування осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених моделлю турбулентності Спаларта – Аллмараса в реалізації відокремлених вихорів, розраховано плоскопаралельне обтікання колового циліндру. Отримані результати розрахунків порівнюються з експериментальними даними.

Ключові слова: *механізм турбулентності, аеродинаміка транспортних апаратів; числове моделювання; осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса; моделі турбулентності.*

Sokhatskyi A. V. Some issues of mathematical modeling of turbulent flows around transport vehicles and their elements

The flow of vehicles in a turbulent flow is a complex nonlinear dynamic system. To study these complex nonlinear systems, certain methodological approaches are implemented. These approaches should be based on objective physical laws that describe the behavior of a dynamic system. As a result of the analysis of the processes under study, it is necessary to identify their regularities and develop their description.

Mathematical modeling of such nonlinear dynamical systems is an interdisciplinary tool for studying various physical processes. The problems of modeling advanced turbulence remain open. A single mechanism of transition to turbulent chaos in different types of hydrodynamic flows has not yet been found. In a developed turbulent flow, there are pulsations with scales ranging from the largest to very small. To date, four mechanisms are known for the transition of laminar flow to turbulent flow when the Reynolds number reaches a critical value. It is believed that the phenomenon of turbulence is to some extent related to chaos.

Today, there is no comprehensive theory of turbulence in various aerodynamic flows. To date, a number of scenarios for the development of turbulent flows based on the processes of motion chaos have been proposed. These are the following scenarios: based on the idea of the hierarchy of quasi-periodic motions; the process of chaoticization of fluid motion by Ruel-Tuckens; transition to turbulent chaos through a sequence of doubling period bifurcations; transition to turbulence through intermittency. These approaches originated as a result of studies of model systems of turbulent flows and their analysis using differential equations. Their mathematical description is extremely complex and requires further development.

To numerically solve the problem of calculating the characteristics of turbulent flow around a ground vehicle, a model of viscous compressible gas flow described by the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations was chosen. The computational domain around the vehicle is complex, so it is advisable to use a multi-block approach and a curved coordinate system. The methodology was developed, the algorithm was constructed, and the codes of the software package were written in Fortran-95.

By numerically solving the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations closed by the Spalart-Allmaras turbulence model in the realization of separated vortices, the plane-parallel flow of a circular cylinder is calculated. The obtained results are compared with experimental data.

Key words***:*** *mechanism of turbulence, aerodynamics of vehicles; numerical modeling; Reynolds-averaged Navier-Stokes equations; turbulence models.*

Постановка проблеми. Фізичний процес обтікання транспортних засобів турбулентним потоком уявляє собою складну нелінійну динамічну систему. Математичне моделювання нелінійних динамічних систем є міждисциплінарним інструментом дослідження різноманітних фізичних процесів [1-4]. Для дослідження таких складних нелінійних систем реалізовують певні методологічні підходи. Ці підходи повинні будуватися на основі об'єктивних фізичних законів, що описують поведінку динамічної системи. В результаті аналізу досліджуваних процесів необхідно виявити їх закономірності та розробити їх опис.

Розуміння турбулентності, як фізичного процесу, різниться у своєму визначені. Так Бредшоу визначає турбулентність наступним чином: «Турбулентність – це тривимірний нестаціонарний рух, у якому внаслідок розтягування вихорів створюється безперервний розподіл пульсацій швидкості в інтервалі довжин хвиль від мінімальних, які визначаються в'язкими силами, до максимальних, які визначаються межовими умовами течії. Вона є звичайним станом рухомої рідини, за винятком течій за малих чисел Рейнольдса» [5]. В роботі [6] турбулентність визначається, як будь-який хаотичний розв'язок тривимірних рівнянь Нав'є-Стокса, чутливий до початкових умов, який з'являється як результат послідовної низки нестійкостей ламінарного потоку, що виникають при поступовому збільшенні значення параметра біфуркації.

Чепмен і Тобак виділили три епохи в розвитку наших уявлень про турбулентність: статистичну, структурну та детерміністичну [6]. Проте вичерпної теорії виникнення турбулентності в різноманітних аерогідродинамічних течіях на сьогодні взагалі немає.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Турбулентність, як фізичне явище виникає за певних умов у нелінійному дисипативному рідкому або газоподібному середовищі з дуже великим числом ступенів свободи, яке може обмінюватися з навколишнім середовищем енергією. Внаслідок цього зміна в часі і просторі будь-якої гідродинамічної величини описується функціями, що містять величезне число компонент Фур'є, тобто мають дуже складний характер [7-10]. Саме з цієї причини кожна індивідуальна рідка частинка цього середовища такої динамічної системи рухається таким заплутаним чином, так що її координати і напрямок руху змінюються з часом за законами стохастичної механіки. Кореляції швидкості в будь-якій точці потоку обмежені при цьому малими часовими інтервалами, залежними від початкових умов, за межами яких неможливо встановити причинний зв'язок між полем швидкостей у різні моменти часу, зокрема кореляцію з попереднім рухом [9,10].

Усе це підкріплює уявлення про стохастичний характер пульсацій швидкості та інших фізичних параметрів у турбулентному потоці, що виникають як результат втрати стійкості ламінарного руху гідродинамічної системи під час зміни зовнішніх керуючих параметрів. З цього погляду турбулентний рух є більш хаотичним, ніж ламінарний, тобто турбулентність ототожнюється з хаосом. У більш загальному розумінні турбулізацію руху рідини або газу можна уявити як результат зміни топології фазових траєкторій, що призводить до перебудови атракторів і якісної зміни (біфуркації) стану руху у фазовому просторі. Відображенням стохастичної природи турбулентності слугує повне перемішування фазових траєкторій з різною асимптотичною поведінкою і структурою (топологією) областей тяжіння (атракторів), що їх оточують [1,7-10]. Ознакою перемішування є швидке загасання кореляційних функцій на протязі значного часу і безперервність частотних спектрів. Така поведінка траєкторій у фазовому просторі означає, що система має ергодичність, тобто майже для всіх реалізацій випадкового поля часові середні дорівнюють відповідним статистичним середнім [9,21]

$$\left\langle A(r)\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}A(r)\,dt \tag{1}$$

де кутовими дужками позначатимемо середнє за ансамблем реалізацій. Ергодична властивість, мабуть, є однією з характерних рис стаціонарного однорідного дрібномасштабного турбулентного поля [11].

Повний статистичний опис турбулентного руху зводиться до визначення ймовірнісної міри на його фазовому просторі, що складається з усіляких випадкових реалізацій, які характеризують стан гідродинамічних полів. Тому найбільш адекватним у теорії турбулентності видається статистичний опис, що спирається на вивчення специфічних статистичних закономірностей, властивих великим сукупностям однотипних гідродинамічних систем. Основою для опису турбулізованого середовища є статистична гідромеханіка, що вивчає статистичні властивості ансамблів течій рідин або газів, які перебувають у макроскопічно однакових зовнішніх умовах [3,4]. Таким чином, проблема феноменологічного моделювання розвиненої турбулентності природних середовищ, полягає у виокремленні деяких середніх характеристик, що адекватно описують властивості системи з величезним числом ступенів свободи (рис. 1). Саме з цієї причини такий підхід пов'язаний з тим чи іншим способом обмеження числа ступенів свободи [3,4].

Отже, турбулентність є однією з форм прояву різноманітності рухів у відкритих механічних системах, що мають дуже велике число ступенів свободи та високим ступенем нелінійності (рис. 1). У системах такого роду зі зростанням деякого керуючого параметра виникають хаотично розподілені і хаотично осцилюючі структури найрізноманітнішого масштабу. Тому тривалий час турбулентність асоціювалася із втіленням чистого хаосу [9-12].

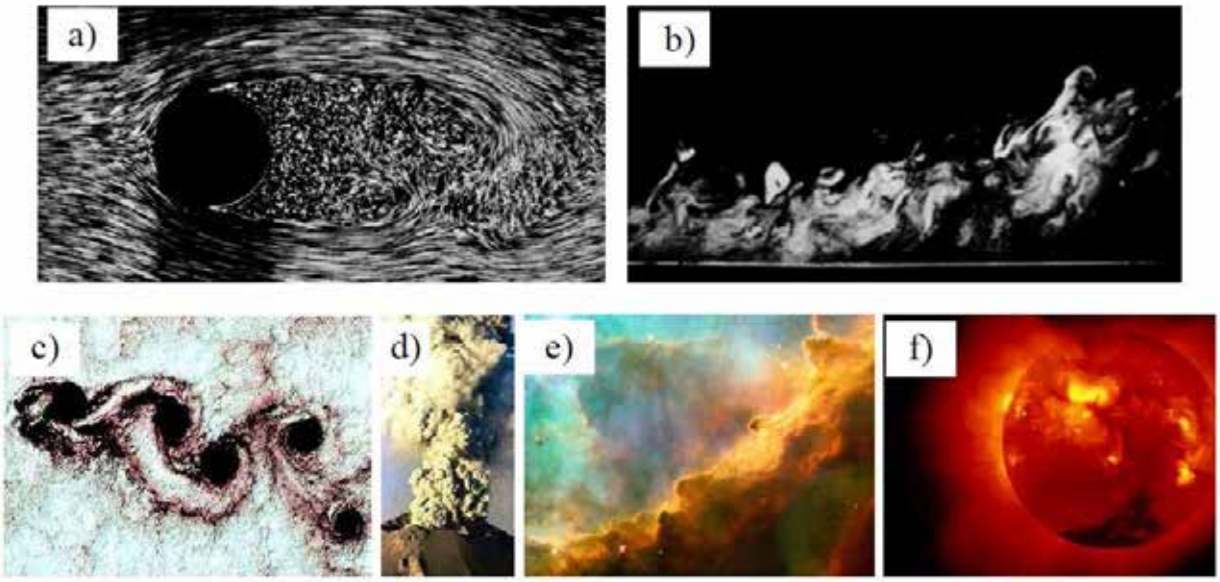


Рис. 1. Приклади когерентних вихрових структур [12-15]:
a – обтікання циліндра; b – турбулентний примежовий шар за наявності позитивного подовжнього градієнта тиску; c – «слід» острова в океані; d – виверження вулкану, e – галактичні хмари; f – Сонце

Проте у розвиненому турбулентному потоці існують елементи порядку, коли на тлі дрібномасштабного пульсуючого руху рідини можуть зароджуватися впорядковані просторово-часові утворення, так звані когерентні вихрові структури [1,11,12,16]. З цієї причини, якщо виникнення гідродинамічної турбулентності характеризує перехід від порядку до хаосу, то в розвиненому турбулентному потоці (коли $Re >> Re_{cr}$) має місце також і зворотний процес – народження порядку з хаосу [9,10]. Проблеми моделювання розвиненої турбулентності, що виникає за досить великих чисел Рейнольдса *Re* залишаються відкритими. Слід зазначити, що єдиного механізму переходу до турбулентного хаосу в різних типах гідродинамічних течій наразі ще не знайдено. На сьогодні найбільш аргументованими є чотири найпоширеніші механізми переходу ламінарної течії до турбулентної при досягненні числом Рейнольдса критичного значення Re_{cr} [1,8,9,17-23]:

– сценарій переходу до турбулентності за Ландау і Хопфом;
– сценарій процесу хаотизації руху рідини Рюеля-Такенса.;
– перехід до турбулентного хаосу через послідовність біфуркацій подвоєння періоду;
– перехід до турбулентності через переміжуваність.

За винятком найбільш ранньої гіпотези Ландау [1], всі інші механізми пов'язані зі скінченно-вимірними моделями турбулентності. Слід зазначити, що наявні на сьогодні дослідження не дозволяють зробити остаточного вибору поміж ними, оскільки в експериментах, як правило, присутні риси різних механізмів.

Постановка завдання. Дослідження таких складних нелінійних систем, як турбулентні течії навколо транспортних апаратів необхідно проводити з використанням коректних математичних моделей. Вони повинні будуватися на основі об'єктивних фізичних законів, що описують поведінку динамічної системи. Це дозволить виявити їх закономірності та розробити їх опис. Метою роботи є розгляд проблеми феноменологічного моделювання розвиненої турбулентності природних середовищ, що адекватно описують властивості системи з певним числом ступенів свободи, і на основі цього провести аргументований вибір математичної моделі течії для подальших досліджень аеродинамічних процесів транспортних апаратів та їх елементів.

Виклад основного матеріалу. Сучасні підходи до опису турбулентної течії. У розвиненому турбулентному потоці присутні пульсації з масштабами від найбільших до дуже малих. Такі течії характеризуються наповненими спектрами Фур'є, причому не тільки часовими, а й просторовими. Основну роль у турбулентному потоці відіграють великомасштабні пульсації, масштаб яких – порядку величини характеристичної довжини L, що визначає розмір області G, у якій відбувається турбулентний рух [1,9-14]. Цю величину називають зовнішнім масштабом турбулентності. Великомасштабні рухи, що мають найбільші амплітуди, мають певну швидкість, за порядком величини порівнянну зі змінами середньої швидкості вздовж відстані L. Дрібномасштабні ж пульсації, що мають значно менші амплітуди, можна розглядати як дрібну детальну структуру, що накладається на основні великомасштабні турбулентні рухи. У дрібномасштабних пульсаціях укладена лише порівняно мала частина всієї кінетичної енергії рідини. Розвинена дрібномасштабна турбулентність є локально однорідною та ізотропною

Згідно з теорією Колмогорова [24] дрібномасштабна структура розвиненої турбулентності для ізотермічної течії (коли $\rho = const$, $\nu = const$) визначається каскадним характером передання енергії по спектру вихорів (турбулентних пульсацій) різних просторово-часових масштабів (рис. 2). Якісна схема каскаду Річардсона-Колмогорова полягає в наступному. Дрібні вихори отримують енергію в результаті послідовного подрібнення великих вихорів при зростанні числа Рейнольдса *Re*. Найбільші енергонесучі вихори утворюються внаслідок втрати стійкості вихідної ламінарної течії, і їхні розміри $\lambda_1 \equiv L_1$ (Прандтлівський шлях перемішування) значно менші за характерний масштаб L самої області течії G. Ці збурення першого порядку, через занадто велике число Рейнольдса великомасштабних пульсацій $\mathrm{Re}_{\lambda_1} \sim \lambda_1 u_1' / \nu$, відповідного їхньому масштабу λ_1 і відносної швидкості u_1' ; виявляються нестійкими і, руйнуючись, породжують збурення другого порядку ($\lambda_2 u_2'$), які, зі свого боку, з тієї самої причини спричиняють появу ще більш дрібних вихорів і т. д [6-14].

Процес подрібнення вихорів зупиняється, коли сили молекулярної в'язкості в рідині починають відігравати істотну роль. Це відбувається для вихорів із числами Рейнольдса $\mathrm{Re}_\eta \sim 1$. При цьому відбувається безперервний перерозподіл питомої кінетичної енергії $\sim \mathrm{U}^3/\mathrm{L}$ несучого потоку від великомасштабних вихорів до більш дрібних аж до найдрібніших із характерним розміром порядку внутрішнього масштабу турбулентності $\eta = \left(\nu^3/\varepsilon\right)^{1/4}$, який характеризує вплив в'язких ефектів на структуру дрібномасштабної турбулентності [1,3,4,6-14]. У межах дуже великих чисел *Re* встановлюється квазістаціонарний режим інерційного перенесення кінетичної енергії від великих вихорів до менших, за якого енергія, врешті-решт через молекулярну в'язкість ν перетворюється на тепло в гідродинамічно стійких дрібних вихорів масштабу $\lambda_k \le \eta$ (в'язкий інтервал) [1,6-14,19-21].

Колмогоров припустив, що існує так званий інерційний інтервал $(\eta < \lambda_k < L_1)$ масштабів вихорів, у яких не відбувається помітного продукування й дисипації енергії, точніше, дисипація в них мала порівняно з тією енергією, що її вони отримують від більших вихорів і передають дрібнішим [1,9, 21,24,25].

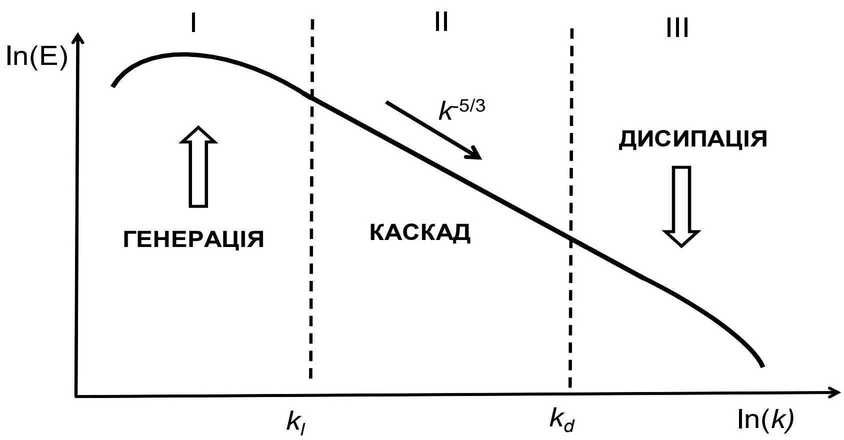


Рис. 2. Області енергетичного спектра турбулентності для високих значень числа Рейнольдса [1, 9, 21, 24, 25]

Важливо підкреслити, що якщо число *Re* велике, то, незважаючи на анізотропність, неоднорідність і нестаціонарність усередненої течії, випадковий характер подрібнення вихорів і хаотичність передавання їхньої енергії каскадом призводять до того, що статистичний режим дрібномасштабних пульсацій, які лежать у просторо-тимчасовій області G, є локально ізотропним. Тобто він є однорідним, ізотропним і квазістаціонарним (таким, що змінюється залежно лише від характеристик осередненого руху). Квазістаціонарний режим турбулентної течії, за якого реалізується потік енергії в область малих масштабів, передбачає, певні межові умови розглянутої області течії G, що створюють накачування і витік[1,9,21, 24,25].

Для дисипаційного масштабу довжина η , згідно першої гіпотези подібності Колмогорова, відповідно до якої статистичний режим дрібномасштабної локальної ізотропної турбулентності однозначно визначається двома розмірними параметрами – середньою швидкістю дисипації енергії $\varepsilon(r,t)$ і молекулярною в'язкістю ν [9.10,24]

$$\eta=\left(\nu^{3}/\varepsilon\right)^{1/4} \tag{2}$$

Величина $\varepsilon(r,t)$ представляє собою осереднену за ансамблем можливих реалізацій течії середовища дисипацію турбулентної енергії в одиниці маси рідини за одиницю часу. Одночасно вона характеризує швидкість передачі кінетичної енергії пульсаційного руху за ієрархією вихорів у каскадному процесі:

$$\mathrm{U}^{3}/\mathrm{L}\approx \mathrm{u}_{1}^{3}/\lambda_{1}\approx\ldots\approx \mathrm{u}_{\eta}^{3}/\eta\cong \nu \mathrm{u}_{\eta}^{2}/\eta^{2}\equiv\varepsilon=const \tag{3}$$

Це наслідок другої гіпотези подібності Колмогорова [24], згідно з якою в інерційному інтервалі ($\eta<\lambda_{k}<L_{1}$) статистичний режим турбулентності визначається єдиним параметром ε. Тут $\mathrm{u}_{k}^{3}/\lambda_{k}\sim \mathrm{u}_{k}^{2}/t_{k}$ – питома кінетична енергія, яку отримують за одиницю часу вихори *k*-го порядку від вихорів *k-1* -го порядку та яку вони передають вихорам (*k*+1)-го порядку; $u_{\eta}\cong(\nu\varepsilon)^{1/4}$, $t_{\eta}\cong\eta/u_{\eta}=\sqrt{\nu/\varepsilon}$ – відповідно порядок швидкості та часу пульсацій у вихорах Колмогоровського дисипативного масштабу η. У теорії Колмогорова передбачається також, що на кожному масштабі (кроці каскаду) вихори заповнюють усю область *G* безперервно [1,24].

Важливе співвідношення, що стосується обумовленого в'язкістю нижнього порогу – Колмогоровського дисипативного масштабу отримуємо з співвідношень (2) і (3)

$$L/\eta\propto\left(\nu^{3}/L^{3}U^{3}\right)^{-1/4}\propto \mathrm{Re}^{3/4} \tag{4}$$

Таким чином, у теорії Колмогорова інерційний інтервал охоплює діапазон масштабів, що зростає при збільшенні числа Рейнольдса як $\mathrm{Re}^{3/4}$. У разі числового моделювання розвиненої турбулентної течії на рівномірній сітці, мінімальна кількість її вузлів у кубі зі стороною, що дорівнює довжині основного масштабу *L*, має бути $N\propto \mathrm{Re}^{3/4}$, що дає змогу в загальному випадку досить скептично дивитися на перспективи чисельного моделювання [1]. Однак через наявність у реальній турбулентності тонких вихрових ниток та інших когерентних утворень, що пронизують значну частину області турбулентної течії, число ступенів свободи розвиненої турбулентності може бути набагато меншим, ніж $\mathrm{Re}^{3/4}$ [1,9,10].

Кількісний опис дрібномасштабної локально ізотропної турбулентності в ділянці G за припущення $\Lambda\sim L_{1}$ ґрунтується на використанні структурних функцій [9]

$$D_{ij}(r)=\overline{\left(u_{i}'(x)-u_{i}'(x+r)\right)\left(u_{j}'(x)-u_{j}'(x+r)\right)} \tag{5}$$

та їхніх спектрів

$$E_{ij}(k)=\int D_{ij}(r)\exp(ik\cdot r)\,dr, \tag{6}$$

де $i=\sqrt{-1}$, *k* – хвильове число [24,26].

З першої гіпотези подібності та припущення про те, що параметри великомасштабної турбулентності слабо змінюються на відстанях порядку $r=|r|$, якщо $r<L_{1}<<L$, випливає [9], що

$$D_{ij}(r)=(\varepsilon r)^{2/3}\left[f(r/\eta)r_{i}r_{j}r^{-2}+g(r/\eta)\sigma_{ij}\right] \tag{7}$$

де *f* та *g* – довільні функції безрозмірного аргументу (r/η).

Згідно з другою гіпотезою подібності, структурна функція в інерційному інтервалі $L_{1}>>r>>\eta\sim L\,\mathrm{Re}^{3/4}$ не залежить від в'язкості ν, тобто *f* = const, *g* = const при $r/\eta>>1$. Звідціля випливає один із найважливіших законів дрібномасштабних турбулентних рухів (закон двох третин): у будь-якій турбулентній течії з досить великим числом Рейнольдса *Re* середній квадрат різниці швидкостей у двох точках на відстані *r* одна від одної за не надто малих, але й не надто великих значень r (порівнянних із масштабом довжини *Λ* відповідної усередненої течії), має бути пропорційним $r^{2/3}$, звідкіля [9,10],

$$D_{11}(r)=C(\varepsilon r)^{2/3}, \tag{8}$$

де C – універсальна стала.

Еквівалентне «закону двох третин» для структурної функції поля швидкості твердження, сформульоване в термінах спектрів, набуває вигляду:

$$E(k)\approx C*\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \tag{9}$$

що згідно роботи [26]. $1/\eta>>k>>1/L$.

Цей закон нині добре підтверджено експериментально для найрізноманітніших турбулентних течій [3,4]. Що стосується структурних функцій *n*-порядку, то теорія подібності Колмогорова приводить до співвідношення $V^{n}\sim(\varepsilon r)^{n/3}$, (де $V\equiv u'(r)-u_{i}'(r+r^{*})$, яке, взагалі кажучи, не підтверджується експериментально, особливо для $n>>1$ [9,19-21]. Як відомо, ця обставина пов'язана з тим, що гіпотези подібності для локально ізотропної турбулентності в їхній первісній формі припускали сталість припливу енергії до дрібномасштабних збурень, що лежать в інерційному інтервалі, тобто сталість параметра Колмогорова ε [9,19,21].

Однак для реальних турбулентних течій дисипація енергії $\varepsilon(r,t)$ змінюється не тільки під час переходу від однієї точки r (області G) течії до іншої, але є випадковою величиною від координат r і часу t_n, пульсуючи разом із миттєвим полем швидкостей $u'(r,t)$. Розподіли ймовірностей дисипації енергії $\varepsilon(r,t)$ впливають на безумовні розподіли ймовірностей для дрібномасштабних характеристик розвиненої турбулентності, які з цієї причини в загальному випадку не можуть бути цілком універсальними [21]. Це залежать у загальному випадку від зміни гідродинамічних характеристик осередненого руху середовища, зокрема від числа Рейнолуса *Re.*

Відоме зауваження [1] щодо початкових гіпотез подібності Колмогорова стосувалося саме цього впливу. У зв’язку з цими труднощами, уявлення Колмогорова про випадковий каскад було уточнено в роботі [7], в якій запропоновано відмовитися від умови $\varepsilon(r,t) = const$ в ділянці G (із центром у точці r і характерним масштабом $\Lambda << L$) і виходити з того, що статистичні характеристики дрібномасштабних рухів (наприклад, структурні функції) визначаються не теоретико-імовірнісним середнім значенням $\varepsilon(r,t)$ випадкової величини ε, а залежать від значень дисипації $\varepsilon(r,t)$, осередненої по деякому об’єму Ω_r з характерним розміром r, малим порівняно з типовим масштабом неоднорідності осередненої течії, $r << \Lambda$. Якщо, як область осереднення, що лежить у межах G, вибрати кулю радіуса r (одержувані результати слабо залежать від форми області осереднення), то величина ε_r, визначається за формулою [9,21]

$$\varepsilon_r(r,t) = \frac{6}{\pi r^3} \int\limits_{|r^*|<<r} \varepsilon(r + r^*, t) dr^* \tag{10}$$

Слід зазначити, що початкова теорія каскаду не є абсолютно точною ще й тому, що в ній не враховуються в явному вигляді будь-які дрібномасштабні когерентні дисипативні структури, якими може володіти турбулентне поле, за винятком допустимого в її рамках макроструктурування потоку на великих масштабах ($r \sim L$) [9,21]. Проте, будь-яка адекватна теорія турбулентності зобов’язана враховувати наявність і динаміку подібних дисипативних структур і нерівномірність їхнього просторово-часового розподілу в хаотичному потоці [27,28].

З іншого боку, з хаотичним характером передання кінетичної енергії по каскаду, що викликається нестійкістю дисипативних структур, пов’язане явище гідродинамічної внутрішньої перемежованості, за якої області, зайняті так званими турбулентними плямами (в яких спостерігаються інтенсивні пульсації градієнтів швидкості, ($\varepsilon_r > 0$), тісно переплітаються з областями зі слабко турбулізованою або повністю безвихровою рідиною (в яких такі пульсації практично відсутні, $\varepsilon_r \cong 0$). Наявність переміжності відповідає режиму течії (за малого числа *Re*), коли потужності постійно діючого механізму турбулізації середовища, що передає енергію потоку на великих масштабах, ще недостатньо для формування повністю розвиненої турбулентності в усій області G, зайнятій рідиною[9,31]. Таким чином, значення величини $\varepsilon_r(r,t)$ (або споріднених їй величин, квадратичних за градієнтами швидкості) можуть слугувати індикатором перемежованості.

Крім статистичного підходу до моделювання турбулентності, нині дедалі ширше знаходять застосування методи прямого числового моделювання турбулентності на основі розв’язування нестаціонарної системи тривимірних рівнянь Нав’є-Стокса. Проте через стохастичність цього явища в реальності вдається отримувати лише осереднені характеристики руху. Це дає змогу, іноді простежити не тільки еволюцію утворень різних просторових структур із плином часу, але також вивчати загальну динаміку і природу розвитку турбулентності. Наприклад, результати чисельного моделювання явища «Перекидів» у гідродинамічній системі (сконструйованій у вигляді багатоярусної моделі зачеплення найпростіших елементів – триплетів) ілюструють каскадний процес передачі енергії в розвиненому турбулентному потоці, що відповідає закону Колмогорова-Обухова і підкріплюють уявлення про загальні властивості в поведінці динамічних систем [29]. Цікаво також зазначити, що дослідження процесу стохастизації динамічних систем і сценаріїв переходу до хаосу під час числового моделювання турбулентності служить аналогом розв’язання некоректних задач із використанням оператора. осереднення і «Параметричного розширення» [30].

За такого підходу впорядкована структура турбулентної течії, що визначається як атрактор асимптотично стійкого розв’язку для осереднених величин, уявляє собою її регуляризований опис [12]. Слід, однак, зауважити, що використання методів прямого числового моделювання турбулентності для розв’язання практично важливих задач (особливо задач, пов’язаних із розрахунками турбулентного тепло і масоперенесення в багатокомпонентних хімічно активних сумішах) часто є проблематичним [9,21,25]. Проте більш, повне розв’язання рівнянь гідродинаміки для флуктуаційних параметрів (через дуже велику кількість турбулентних ступенів свободи) містило б настільки велику інформацію, що не могло б бути повністю реалізовано [9,21,25].

У зв’язку з цим на перший план виступає завдання наближеного (напівемпіричного) опису турбулентності. Під час виведення усереднених рівнянь руху рідини, що становлять основу сучасної гідродинамічної теорії турбулентності, основна маса дослідників опирається на рівняння гідродинаміки у формі рівнянь Нав’є-Стокса, які за припущенням описують течію рідини і в турбулізованому режимі навіть за екстремально великих значень безрозмірних параметрів. Однак сама можливість вибору цих рівнянь як стартових для переходу до осереднених рівнянь Рейнолдса не є безперечною, хоча б тому, що під час їхнього виведення робиться досить сильне припущення про лінійний зв'язок тензора в'язких напружень Π_{ij} з першими похідними поля швидкостей $\partial u_i / \partial x_j$ [16]. Хоча в ламінарних і слабко надкритичних течіях це припущення добре працює, але в сильно нелінійних турбулентних рухах рідини не можна виключити більш складної залежності тензора в'язких напружень від тензора швидкостей деформацій. У зв'язку з цим слід навести ще один аргумент на користь подібного роду сумнівів, процитувавши витяг із роботи [16]: «Таким чином, гіпотеза про те, що турбулентність повністю описується рівняннями Нав'є-Стокса, математично не обґрунтована, оскільки немає загальної теореми, яка гарантує глобальне існування розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса, як задачі з початковими умовами. Цілком імовірно (хоча таких прикладів поки що немає), що ці розв'язки можуть стати сингулярними, так що рівняння перестають бути справедливими і для побудови повної теорії потрібні, мабуть, нові фізичні принципи, що виходять за рамки класичної гідродинаміки».

На сьогодні дослідники турбулентних течій використовують переважно класичний підхід до моделювання зсувної турбулентності, який ґрунтується на ідеї Рейнольдса про усереднення гідродинамічних рівнянь за ансамблем тотожних течій (можливих реалізацій), або за допомогою іншої еквівалентної процедури [31.32,34,36]. Отримані в такий спосіб рівняння масштабу середнього руху, внаслідок нелінійності вихідних гідродинамічних рівнянь, містять невизначені кореляційні члени (типу векторів турбулентної дифузії і тепла, або тензора турбулентних напружень Рейнольдса) і тому виявляються незамкненими. Замикання осереднених за Рейнольдсом рівнянь гідродинаміки суміші зазвичай проводять за допомогою тих чи інших напівемпіричних моделей турбулентності, що основуються, наприклад, на залученні послідовності диференціальних рівнянь для моментів флуктуацій. Разом з тим, важливо вже тут вказати на принциповий недолік цього підходу, який полягає в тому, що усереднення Рейнольдса здійснюється за усіма просторовими масштабами турбулентності [16]. Тобто моделювання на основі напівемпіричних гіпотез замикання за необхідності проводиться одночасно по всьому спектру різномасштабних вихрових структур.

Якщо врахувати те, що на відміну від практично універсального спектра дрібномасштабних пульсацій, великомасштабні вихрові структури істотно різні для різних течій (рис. 3), то стає очевидною безперспективність створення універсальних напівемпіричних моделей турбулентності, придатних для опису різнотипних турбулентних течій. З цієї причини завдання полягає головним чином у встановленні меж застосовності тієї чи іншої напівемпіричної моделі турбулентності. Проте є деякі підстави сподіватися, що залучення багатопараметричних апроксимацій, що ґрунтуються на еволюційних рівняннях переносу для старших моментів пульсуючих у потоці термагідродинамічних параметрів, що пульсують у потоці, дасть змогу певною мірою просунутися на шляху побудови універсальних моделей турбулентності з ускладненими властивостями, що описують досить велику кількість різноманітних турбулізованих природних середовищ [9,31].

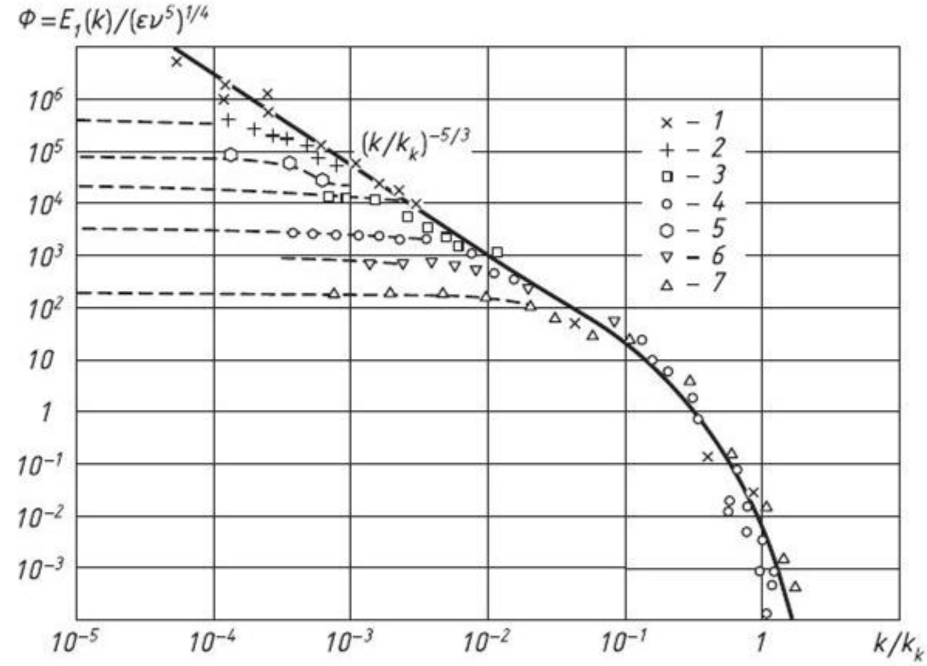


Рис. 3. Спектр поздовжньої складової турбулентних пульсацій для різних течій [31]:
1 – припливно-відливний канал; 2 – крутий струмінь; 3 – течія в трубі; 4 – течія з постійним зсувом;
5 – слід за циліндром; 6 – турбулентність за сіткою; 7 – примежовий шар

Разом з тим, актуальна на сьогодні проблема моделювання структурованої турбулентності порушує питання про пошук й інших базових рівнянь, для яких є фізичні підстави розв'язання відповідної проблеми замикання. Можливість опису подібного роду турбулентності може бути основана, зокрема, на конструюванні кінетичних рівнянь типу Фоккера-Планка-Колмогорова, аналогічних тим, що використовуються в теорії фазових переходів другого роду [9]. Вважається, що такий шлях побудови теорії розвиненої турбулентності може бути ефективним.

Математична модель та методика розв'язування задачі. Опис механізму нестаціонарного відриву потоку та зародження турбулентного примежового шару є актуальним завданням для багатьох дослідників, так і багатьох практично важливих застосувань. Зокрема, різкі зміни аеродинамічних характеристик профілів крил та лопатевих систем різноманітних гідроагрегатних машин при малих змінах кута атаки та режимів роботи, а також динамічні навантаження на різноманітні конструкції під дією постійного і різко мінливого потоку, що набігає, є наслідком нестаціонарного обтікання та відриву потоку.

Вичерпної теорії виникнення турбулентності в різноманітних аеродинамічних течіях на сьогодні взагалі немає. Проте, як приведено вище, було запропоновано ряд сценаріїв розвитку турбулентних течій, основаних на процесах хаотизації руху. Цей підхід зародився в результаті досліджень модельних систем диференціальних рівнянь. Частково це підтверджується експериментальними дослідженнями гідродинамічних особливостей турбулентних течій в аеродинамічних трубах [14,15,19].

Для розв'язування задачі з розрахунку характеристик течії навколо наземного транспортного засобу обрано модель течії в'язкого стисливого газу, що описується осередненими за Рейнольдом рівняннями Нав'є-Стокса. Розрахункова область навколо транспортного апарата є складною, тому доцільно використовувати багатоблоковий підхід та криволінійну систему координат. Система рівнянь Нав'є-Стокса осереднена за Рейнольдсом для довільної криволінійної системи координат запишеться

$$\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial t}+\frac{\partial\left(\widehat{E}-\widehat{E}_{\mathrm{v}}\right)}{\partial \xi}+\frac{\partial\left(\widehat{F}-\widehat{F}_{\mathrm{v}}\right)}{\partial \eta}+\frac{\partial\left(\widehat{G}-\widehat{G}_{\mathrm{v}}\right)}{\partial \zeta}=\widehat{H}, \tag{11}$$

де $\widehat{Q}$ – вектор невідомих змінних; $\widehat{E}, \widehat{F}, \widehat{G}$ – вектори нев'язких потоків; $\widehat{E}_{\mathrm{v}}=\xi_x E_v+\xi_y F_v+\xi_z G_v$, $\widehat{F}_{\mathrm{v}}=\eta_x E_v+\eta_y F_v+\eta_z G_v$, $\widehat{G}_{\mathrm{v}}=\zeta_x E_v+\zeta_y F_v+\zeta_z G_v$ – вектори в'язких потоків; $\widehat{H}=1/jH$ – вектор джерельних членів.

Вектори $\widehat{Q},\widehat{E},\widehat{F},\widehat{G},E_v,F_v,G_v$ визначаються наступними співвідношеннями

$$\widehat{Q}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{bmatrix},\ \widehat{E}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho U u+\xi_x p\\ \rho U v+\xi_y p\\ \rho U w+\xi_z p\\ \left(E_t+p\right)U-\xi_t p\end{bmatrix},\ \widehat{F}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho V\\ \rho u V+\eta_x p\\ \rho v V+\eta_y p\\ \rho w V+\eta_z p\\ \left(E_t+p\right)V-\eta_t p\end{bmatrix},\widehat{G}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\rho W\\ \rho u W+\zeta_x p\\ \rho v W+\zeta_y p\\ \rho w W+\zeta_z p\\ \left(E_t+p\right)W-\zeta_t p\end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$E_v=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}-q_x\end{bmatrix},\ F_v=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+w\tau_{xz}-q_y\end{bmatrix},\ G_v=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zz}\\ u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}-q_z\end{bmatrix}, \tag{13}$$

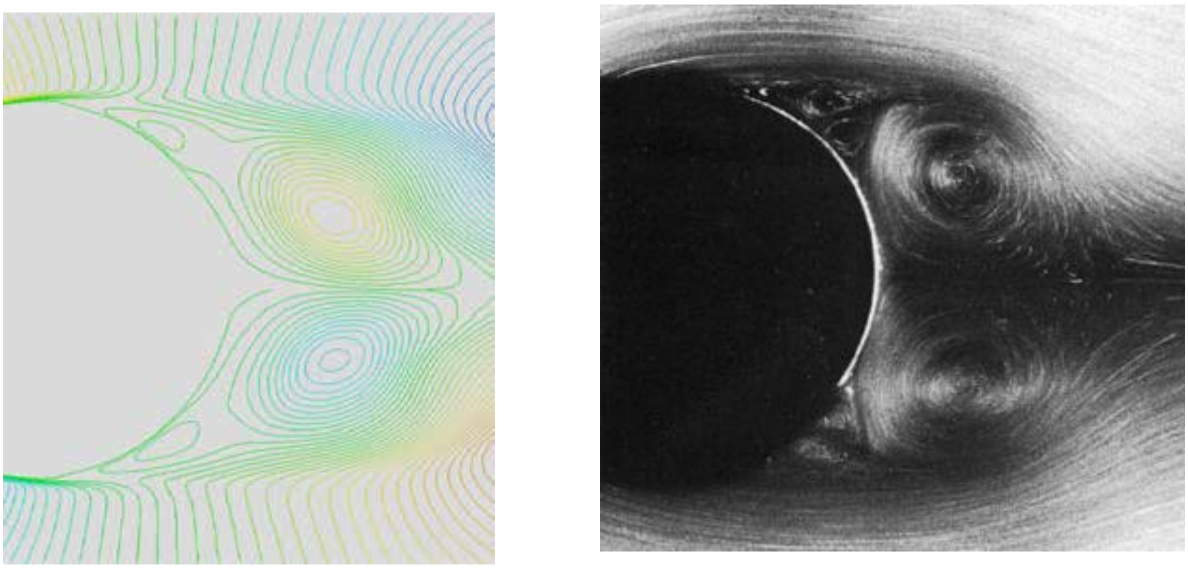
де $\xi_x,\xi_y,\xi_z,\eta_x,\eta_y,\eta_z,\zeta_x,\zeta_y,\zeta_z$ – метричні коефіцієнти, $J=\partial(\xi,\eta,\zeta)/\partial(x,y,z,)$ – якобіан перетворення координат, $\tau_{xx},\tau_{yy},\tau_{zz},\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$ – компоненти тензора напружень та q_x,q_y,q_z – компоненти вектора теплових потоків. $E_t=\rho\left[e+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]$.

В системі рівнянь (11) n–компонентні вектори $\widehat{Q},\widehat{E}_i,\widehat{F}_i,\widehat{G}_i,\widehat{E}_{\mathrm{v}},\widehat{F}_{\mathrm{v}},\widehat{G}_{\mathrm{v}}$ мають відповідний вигляд в залежності від моделі турбулентності.

Результати числового моделювання. Тривимірна задача обтікання циліндра дозвуковим потоком в'язкого газу є однією з базових задач для тестування будь-якої програмної реалізації задач зовнішньої аеродинаміки твердих тіл. Її числове розв'язування дозволяє аналізувати аеродинамічні характеристики та структуру течії. Для виконання цього завдання розроблено методики, алгоритми та програм з визначення параметрів течії навколо елементів транспорту засобу на основі розв'язування осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених моделлю турбулентності Спаларта – Аллмараса та k-ω Ментера (SST) [32,34].

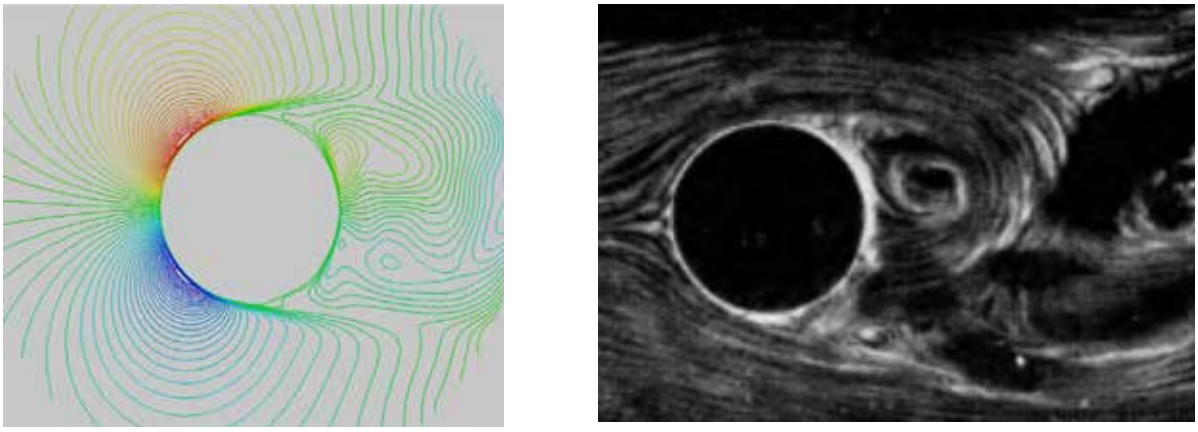
Шляхом числового розв'язування осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених моделлю турбулентності Спаларта – Аллмараса [32] в реалізації відокремлених вихорів, розраховано обтікання колового циліндру. Отримані результати розрахунків порівнюються з експериментальними даними (рис. 4-6).

На рис. 4-5 показано течію за циліндром, одержану розрахунковим шляхом та в експерименті [33,34]. Після досягнення усталеного режиму за циліндром розвивається вихорова доріжка. Представлені результати розрахунку та фотографії поля течії з експерименту узгоджуються [33,34]. Видно, що на приведеному матеріалі спостерігається подібність полів течії. Це говорить про відповідність математичної моделі фізичним процесам, що моделюються.



а) *б*)

Рис. 4. Течія за циліндром: *а* –розрахунок (ізолінії V), Re=1700; *б* – експеримент Re=1700 [33,34]



а) *б*)

Рис. 5. Течія навколо циліндра зі сходом вихорової доріжки: *а* – розрахунок (ізолінії V), Re=10000; *б* – експеримент [33,34]

Результати розрахунків розподілу коефіцієнта тиску по поверхні циліндру, отриманого шляхом розв'язування осереднених за Рейнольдсом Нав'є-Стокса, замкнених моделлю турбулентності Спаларта – Аллмараса в реалізації відокремлених вихорів, показано на рис. 6. Отримані результати розподілу коефіцієнта тиску порівнюються з експериментальними даними [33]. Видно задовільне узгодження розрахованих та експериментальних даних.

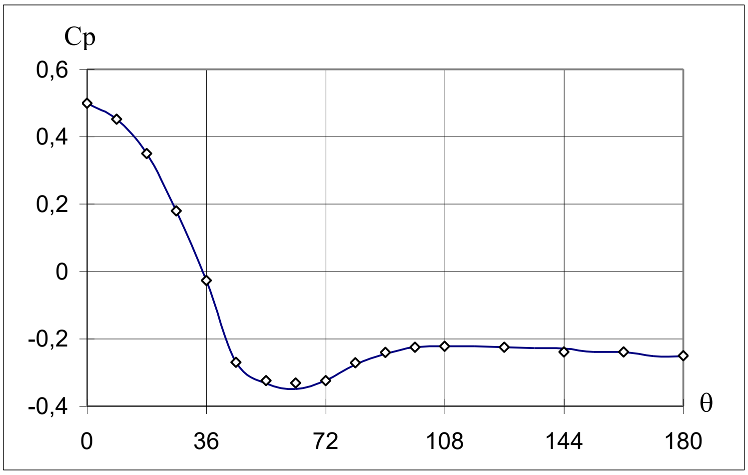


Рис. 6. Розподіл коефіцієнта тиску на поверхні циліндра для Re=14000
з використанням моделі турбулентності Спаларта – Аллмараса
в реалізації відокремлених вихорів: __ – розрахунок Re=14500; O – експеримент Re =14500 [33]

Висновки. На сьогодні для реальних аеродинамічних систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями, та які повинні повністю відображати динаміку процесу з урахуванням складних нелінійних ефектів проблема математичного моделювання реальних течій залишається невирішеною. Турбулентний рух рідини настільки складний і підходи до його вивчення настільки різноманітні, що він не залишає шансів на системне і, головне, повне викладення. Теорія турбулентності і ще далека від свого завершення. Продовжують розроблятися нові підходи до її вивчення та розуміння механізму турбулентних процесів. Зростає кількість моделей, які пропонуються для кращого розуміння окремих її властивостей. Теорія турбулентності усе ще перебуває у стадії розробки й далека від свого завершення. Повний розрахунок турбулентного руху поки що неможливий.

На сьогодні числові методи є основним інструментом, що дають змогу продовжити дослідження і розвивати результати, одержувані з використанням якісної теорії нелінійних диференціальних рівнянь. Подальший розвиток електронно-обчислювальних машин, експериментальні дослідження в гідроаеродинаміці та перспективні розробки нових методів розв’язування рівнянь математичної фізики дозволять досягнути певних успіхів у числовому моделюванні реальних течій навколо транспортних апаратів та їх елементів.

Список використаних джерел:

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechenics. Oxford: Pergamon pres. 1987. 540 p.

2. Batchelor G. K. The theory of homogeneous turbulence. Cambridge: University Press. Cambridge. 1953. 198 p.

3. *Monin A.S., Yaglom A.M. S*statistical fluid mechanics: Mechanics of Turbulence. Volume 1. English edition edited by J.L. Lumley. Cembridge. Massachusetts: MIT press. 1975. 774 p.

4. Monin A.S., Yaglom A.M. Statistical fluid mechanics: Volume 2, English edition edited by J.L. Lumley. Cembridge, Massachusetts: M.I.T. Press.1975. 896 p**.**

5**.** Bradshaw, P. An introduction to turbulence and its measurement. Oxford: Pergamon Press. 1971. 218 p.

6. Chapman G.T., Tobak M. Observations, theoretical deas, and modeling of turbulent flows – past, present and future / *Theoretical Approaches to Turbulence (Dwoyer et al. (eds))*. New York: Springer-Verlag, 1985. P.19–49.

7. Obukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbu1ence. *J. F1uid Mech.* 1962. V. 13. Pt. l. P. 77-81.

8. Klimontovich Yu. L. Turbulent motion and the structure of chaos. A new approach to the statistical theory of open systems. London: Publisher Springer. 1991. 398 *p.*

9. Kolesnichenko A. V., Marov M.Y. Turbulence and self-organization: modeling astrophysical objects. London: Edition Publisher: ‎Springer. 2013. 685 p.

10. Kolesnichenko A. V., Marov M.Y. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht: Kluwer Academic Publishersю. 2001. 375 p.

11. K. de Fériet J. Statistical mechanics and theoretical models of diffusion processes. *Advances in Geophysics,* Volume 6, 1959, P. 139-147

12. Belotserkovskii, O. M. Numerical experiment in turbulence: From order to chaos. *Int. J. Fluid Mech. Res.*, 23, No. 5-6, 1996. P. 321–488.
13. Hinze I.J. Turbulense: An introduction to its mechanism and theory. New York: McGraw-Hill book company. 1959. 586 p.
14. Batchelor G. K An **i**ntroduction to fluid dynamics. Cambridge: Cambridge University Press. 1967. 615 p.
15.Van Dyke, M. An album of fluid motion. Stanford: Parabolic Press, CA, 1982. 176 p.
16. Belotserkovskii, O. M. Numerical modeling in continuum mechanics. M.: Nauka. 1991. 520 p.
17. Marsden J. E., McCracken M. The hopf bifurcatioп aпd Its applicatioпs. New Уork: Springer-Verlag. 1976. 284 p.
18. Marsden J. E., McCracren M. The hopf bifurcation and its applicatioпs. Berlin: Springer. V19, 1988. 408 p.
19. Frost W., Moulden T. Handbook of turbulence: Volume 1**.** Fundamentals and **a**pplications. New York: Publisher Plenum Press. 1977. 498 p.
20. Feigenbaum M. J. Universa1 behavior in nonlinear system. *Physica*. 1978. v.70. P. 16.
21. Фрік П. Г. Турбулентність: підходи та моделі. Х.: ІКД. 2003. 292с.
22. Клімонтович Ю. Л. Введення в фізику відкритих систем. Х.: Янус-К, 2002. 284 с.
23. Малинецький Г.Г. Математичні основи сінергетики: Хаос, структури, обчислювальний експеримент. Х.: Книжковий дім Либроком, 2009. 312 с.
24. Колмогоров А. М. Локальная структура турбулентності в нестисливій рідині при дуже великих числах Рейнольдса. *Доповіді АН СРСР.* 1941. Т. 30. С. 299-303.
25. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K. An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows. *Flow turbulence and combustion.* 2015. 95(4). P. 709-737.
26. Обухов А. М. Про розподілення енергії в спектрі турбулентного потоку. Відом. *АН СРСР. Сер. географія і геофізика.* 1941. Т. 5. № 4. С. 453-466.
27. Brown G. L., Roshko A. O n density effects and 1arge structures i n turbu1ent mixing layers. *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64. P. 775-816.
28. Crow S. C., Champagne F. H. Orderly structures in jet turbu1ence. *J. Fluid Mech*. 1971. V. 48. P. 547-591.
29. Гледзер Е. Б., Должанекий Ф. В., Обухов А. М. Системи гідродинамічного типу та їх застосування. М.: Наука, 1981. 368 с.
30. Тихонов А. Н., Арсенін В. Я. Методи розв’язування некоректних задач. Kyiv : Наукова думка. 1986. 182 с.
31. Chapman D**.**R. Computational aerodynamics development and utlook: Dryden Lecture in Research for 1979**.** 17th Aerospace Sciences Meeting, *AIAA Paper.* 1979-0129.
32. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, *AIAA Paper*, 1992-0439.
33. Roshko A. On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies. *NACA Tech. Note*. 1954. N3169. 29 p.
34. Menter F. R. Zonal two-equation k-ω turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA-Paper,*1993-2906.
35. Prediction Methods for Turbulent Flows/ Edited by Wolfgang Kollmann. Washington, London. Publisher: McGraw-Hill Education, 1980. 468 p.

References:

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Fluid mechenics*. Oxford. Pergamon pres.
2. Batchelor G. K. **(**1953.**)** *The Theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press.
3. *Monin A.S., Yaglom A.M. (*1975*) Sstatistical fluid mechanics: Mechanics of Turbulence. Volume 1.* English edition edited by J.L. Lumley. Cembridge, Massachusetts. MIT press.
4. Monin A.S., Yaglom A.M. **(**1975**)** *Statistical fluid mechanics: Mechanics of Turbulence.* Volume 2, English edition edited by J.L. Lumley. Cembridge, Massachusetts**.** M.I.T. Press**.**
5**.** Bradshaw, P. (1971) *An introduction to turbulence and its measurement*. Oxford: Pergamon Press.
6. Chapman G.T., Tobak M. (1985) Observations, theoretical deas, and modeling of turbulent flows – past, present and future. *Theoretical Approaches to Turbulence (Dwoyer et al. (eds))*. New York: Springer-Verlag, 19–49.
7. Obukhov A. M. (1962) Some specific features of atmospheric turbu1ence. *J. F1uid Mech.* V. 1 3. Pt. l. 77-81.
8. Klimontovich Yu. L. (1991) *Turbulent motion and the structure of chaos. A new approach to the statistical theory of open systems*. London: Publisher Springer.
9. Kolesnichenko A. V., Marov M.Y. (2013) *Turbulence and self-organization: modeling astrophysical objects*. London: Edition Publisher: ‎Springer.
10. Kolesnichenko A. V., Marov M.Y. (2001) *Mechanics of turbulence of multicomponent gases.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishersю.
11. K de Fériet J. (1959,) Statistical mechanics and theoretical models of diffusion processes. *Advances in Geophysics*. Volume 6**.** 139-147.

12. Belotserkovskii, O. M. (1996) Numerical experiment in turbulence: From order to chaos. *Int. J. Fluid Mech. Res.,* 23, No. 5-6. 321–488.

13. Hinze I.J. (1959) *Turbulense: An introduction to its mechanism and theory.* New York: McGraw-Hill book company.

14. Batchelor G. K **(**1967**)** *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge: University Press.

15. Van Dyke, M. (1982) *An album of fluid motion.* Stanford: Parabolic Press, CA.

16. Belotserkovskii, O. M. (1991) *Numerical modeling in continuum mechanics.* M.: Nauka.

17. Marsden J. E., McCracken M. (1976) *The hopf bifurcation and Its applications.* New Уork: Springer-Verlag.

18. Marsden J. E., McCracren M. (1988) *The hopf bifurcation and its applications*. Berlin: Springer. V19,

19. Frost W., Moulden T. (1977) *Handbook of turbulence*: Volume 1 *Fundamentals and applications*. Volume 1 New York: Publisher Plenum Press.

20. Feigenbaum M. J. (1978) Universa1 behavior in nonlinear system. *Physica*. v.70. 16.

21. Frik P. H. (2003) *Turbulentnist: pidkhody ta modeli [Turbulence: approaches and models]*. Kh.: IKD (in Ukr.).

22. Klimontovych Yu. L. (2002) *Vvedennia v fizyku vidkrytykh system [Introduction to the physics of open systems]*. Kh. : Yanus-K (in Ukr.).

23. Malynetskyi H.H. (2019) *Matematychni osnovy sinerhetyky: Khaos, struktury, obchysliuvalnyi eksperyment [Mathematical foundations of synergetics: Chaos, structures, computational experiment]*. K.: Knyzhkovyi dim Lybrokom, (in Ukr.).

24. Kolmohorov A. M. (1941) Lokalnaia struktura turbulentnosti v nestyslyvii ridyni pry duzhe velykykh chyslakh Reinoldsa [Local structure of turbulence in incompressible fluid at very high Reynolds numbers]. *Dopovidi AN SRSR*. T.30. 299-303 (in Ukr.).

25. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K. (2015) An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows*. Flow, turbulence and combustion,* 95(4), 709-737.

26. Obukhov A. M. (1941) Pro rozpodilennia enerhii v spektri turbulentnoho potoku [On the distribution of energy in the turbulent flow spectrum]. *Vidom. AN SRSR. Ser. heohrafiia i heofizyka*. T. 5. N 4. 453-466 (in Ukr.).

27. Brown G. L., Roshko A. (1974) On density effects and 1arge structures i n turbu1ent mixing layers. *J. Fluid Mech.* V. 64. 775-816.

28. Crow S. C., Champagne F. H. (1971) Orderly structures in jet turbu1ence. *J. Fluid Mech*. V. 48. 547-591.

29. Hledzer E. B., Dolzhanekyi F. V., Obukhov A. M. (1981) *Systemy hydrodynamychnoho typu ta yikh zastosuvannia [Hydrodynamic systems and their application].* M.: Nauka (in Ukr.).

30. Tykhonov A. N., Arsenin V. Ya. (1986) *Metody rozviazuvannia nekorektnykh zadach [Methods of solving incorrect problems].* Kyiv : Naukova dumka. (in Ukr.).

31. Chapman D**.**R. (1979**)** Computational aerodynamics development and utlook: Dryden Lecture in Research for 1979**.** 17th Aerospace Sciences Meeting, *AIAA Paper.* 1979-0129.

32. Spalart P. R., Allmaras S. R. (1992) A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, *AIAA Paper*, 1992-0439.

33. Roshko A. (1954) On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies. *NACA Tech. Note*. N3169. 29.

34. Menter F. R. (1993) Zonal two-equation k-ω turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA-Paper,*1993-2906.

35. Kollmann W. (1980) *Prediction methods for turbulent flows*. Washington, London: Publisher: McGraw-Hill Education.