

Пасічник А. М., доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного моделювання та системного аналізу
Дніпровського державного технічного університету
ORCID: 0000-0002-8561-1374

Худа Ж. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного моделювання та системного аналізу
Дніпровського державного технічного університету
ORCID: 0000-0002-3451-5825

АЛГОРИТМ ОПТИМІЗАЦІЇ МАРШРУТІВ АВТОМОБІЛЬНИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ВАНТАЖІВ НА ОСНОВІ ДИНАМІЧНОЇ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ ГІЛОК І ГРАНИЦЬ

В статті на основі методу гілок і границь запропоновано алгоритм оптимізації маршрутів автомобільних перевезень вантажів за критерієм мінімізації транспортної роботи з їх доставки, коли відстані та обсяги доставки для кожного пункту і між пунктами є заданими. В даному дослідженні в якості критерія оптимізації застосовується мінімізація транспортної роботи перевезення вантажів із відповідного транспортно-логістичного центру до визначених пунктів доставки та одноразовість проходження місць їх розташування. Особливість запропонованого підходу полягає в тому, що вся множина можливих варіантів перевезення вантажу описується матрицею транспортної роботи доставки елементи якої обчислюються динамічно на кожному кроці алгоритму, на відміну від класичного застосування методу гілок і границь при мінімізації довжини маршруту перевезень, коли елементи матриці відстаней перевезень є сталими. Для підвищення ефективності пошуку оптимального маршруту проведено модифікацію методу гілок і границь (ТВМ) на випадок динамічного визначення елементів матриці транспортної роботи доставки вантажів.

В роботі наведено алгоритм застосування запропонованого варіанту методу ТВМ для побудови оптимального автомобільного маршруту з мінімізацією транспортної роботи перевезення вантажів із логістичного центру в мережі із n пунктів доставки. Аналіз результатів проведених розрахунків підтверджує ефективність запропонованого підходу і показує, що його застосування дозволяє зменшити обчислювальну складність завдяки використанню покращених стратегій відсікання нерелевантних рішень та адаптивного розгалуження можливих варіантів доставки вантажів. Запропонований підхід дозволяє підвищити точність результатів розрахунків та зменшити час пошуку оптимального маршруту за критерієм мінімізації транспортної роботи доставки вантажів до пунктів призначення. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації логістичних процесів та зниження витрат на транспортні перевезення.

Ключові слова: метод гілок і границь, оптимізація маршрутів, транспортна логістика, автомобільні перевезення.

Pasichnyk A. M., Khuda Zh. V. Algorithm for optimization of road transportation cargo routes based on dynamic modification of the twig and boundary method

In the article, based on the twig and boundary method, an algorithm for optimizing routes for road freight transportation is proposed based on the criterion of minimizing the transport work for their delivery, when the distances and volumes of delivery for each point and between points are given. In this study, the optimization criterion used is the minimization of the transport work of transporting goods from the corresponding transport and logistics center to the specified delivery points and the uniqueness of passing through their locations. The main idea of the method is that the branching of the set of possible freight transportation options into subsets is carried out according to an algorithm based on constructing estimates from above for the objective function on a certain set of solutions, which allows organizing a complete procedure for searching for possible route options for this problem. In accordance with the proposed approach, the set of all possible route options is divided into several non-intersecting subsets, from which the subset is determined on which the objective function of transport work reaches its smallest value.

The paper shows that transport work is a complex indicator that takes into account the volume and distance of cargo transportation and is determined by their product. Unlike the classical application of the twig and boundary method when minimizing the length of the transportation route, when the elements of the transportation distance matrix are constant, the peculiarity of the proposed approach is that the entire set of possible cargo transportation options is described by the transport work matrix of delivery, the elements of which are calculated dynamically at each step of the algorithm, since their value depends on the volume of shipment that occurred at the previous stage. To increase the efficiency of searching for the optimal route, a modification of the twig and boundary method (TBM) was carried out for the case of dynamic determination of the elements of the

transport work matrix of delivery. An algorithm for applying the proposed variant of the TBM method to construct an optimal road route by minimizing the transport work of transporting goods from a logistics center and a network of five delivery points is also presented.

Analysis of the results of the calculations confirms the effectiveness of the proposed approach and shows that its application allows to reduce the computational complexity due to the use of improved strategies for cutting off irrelevant solutions and adaptive branching of possible cargo delivery options. The proposed approach allows to increase the accuracy of the calculation results and reduce the time of searching for the optimal route according to the criterion of minimizing the transport work of delivering cargo to the destination points. The results obtained can be used to optimize logistics processes and reduce the cost of transportation.

Key words: twig and boundary method, route optimization, transport logistics, road transportation.

Постановка проблеми. Автомобільні перевезення вантажів є ключовим елементом логістичних процесів, що забезпечують ефективний рух товарів між постачальниками і споживачами. В умовах ринкової конкуренції, транспортні компанії мають постійно вирішувати завдання мінімізації витрат на перевезення при забезпеченні високої якості логістичних послуг. Зростання обсягів вантажних перевезень і ускладнення логістичних ланцюгів вимагає використання ефективних методів оптимізації транспортних процесів. Тому, для підвищення ефективності логістичних систем проблема розробки та удосконалення методів і алгоритмів оптимізації маршрутів автомобільних вантажних перевезень має достатньо актуальне значення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На даний час для підвищення ефективності управління перевезеннями за рахунок визначення оптимального маршруту з урахуванням заданих обмежень достатньо ефективно застосовується метод гілок і границь (TBM). В основі цього методу лежить ідея послідовного розбиття множини допустимих розв'язків на підмножини. На кожному кроці розбиття, кожна підмножина перевіряється на наявність в ній оптимального розв'язку. Вперше метод гілок і границь був запропонований в 1960 р. для вирішення загальної задачі цілочисельного лінійного програмування [1]. В подальшому було проведено узагальнення даного методу для задачі комівояжера в роботі [2]. Починаючи з цього моменту, з'явилась велика кількість робіт, присвячених методу гілок і границь та різних його модифікацій, що пояснюється достатньо широким спектром можливостей цього методу.

Застосування методу гілок і границь до задачі комівояжера (TSP) є предметом багатьох досліджень, які сприяли розвитку ефективних алгоритмів для розв'язання цієї NP-складної задачі. Так у статті [3] запропоновано мережевий підхід до методу гілок і границь для розв'язання задачі комівояжера, що дозволяє ефективно розбивати задачу на підзадачі, кожна з яких розв'язується як задача мінімального остовного дерева. У роботі [4] автори розглянули варіацію TSP, де необхідно відвідати не конкретні точки, а певні області. Вони запропонували ефективний алгоритм, заснований на TBM, який дозволив знаходити оптимальні рішення для задач з великою кількістю вершин. У роботі [5] дослідники представили модифікований алгоритм методу гілок і границь для TSP, демонструючи його ефективність на прикладах з невеликою кількістю міст. У доповіді [6] автори проаналізували застосування методу гілок і границь для розв'язання TSP, підкреслюючи його ефективність для задач середнього розміру. У статті [7] дослідники запропонували квантовий варіант TBM, який надає певні переваги порівняно з класичними алгоритмами. Аналіз можливого застосування методу гілок і границь для задачі комівояжера наведено в роботі [8]. Моделі та алгоритми розгалуження та відсікання для задач збору та доставки з часовими вікнами представлені в статті [9]. Можливі варіанти реалізації методу гілок і границь як алгоритму цілочисельного лінійного програмування розглянуто в роботах [10, 11]. Аналіз особливостей застосування методу гілок і границь в задачах побудови оптимальних регресійних моделей проведено в роботі [12]. Можливі варіанти застосування методу TBM для оптимізації логістичних транспортних задач розглянуті в роботах [13, 14].

Аналіз результатів проведених досліджень показує динамічну еволюцію TBM, широкий спектр застосувань та модифікацій, які відображають специфіку різних варіацій задачі комівояжера, включаючи адаптацію класичних підходів до нових умов та застосування сучасних обчислювальних технологій.

Постановка завдання. Мета статті: розробка алгоритму оптимізації маршрутів автомобільних перевезень вантажів за критерієм мінімізації транспортної роботи з їх доставки, коли відстані та обсяги доставки для кожного пункту і між пунктами є заданими. У даному дослідженні в якості критерія оптимізації обирається мінімізація транспортної роботи перевезення вантажів із відповідного транспортно-логістичного центру до визначених пунктів доставки та одноразовість проходження місць їх розташування. Для підвищення ефективності пошуку оптимального маршруту пропонується застосувати варіант модифікації методу гілок і границь на випадок динамічного визначення елементів матриці транспортної роботи з доставки вантажів.

Виклад основного матеріалу. Особливості застосування методу TBM для побудови оптимального маршруту перевезення. Розглядається проблема оптимізації маршрутів автомобільних перевезень для мінімізації сумарної транспортної роботи перевезення вантажів від транспортно-логістичного центру до заданих пунктів доставки. Тобто, необхідно знайти такий замкнутий маршрут, який проходить через кожне

місто один і лише один раз, при якому мінімізується сумарна транспортна робота з доставки вантажів до місць призначення.

Відстані між відповідними пунктами перевезень є відомими і задані матрицею відстаней:

$$C = \|c_{ij}\| \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

c_{ij} – відстань між місцями розміщення пункту відправлення і пунктів доставки.

Обсяги доставки вантажів із транспортно-логістичного центру до кожного пункту призначення також є заданими і визначаються матрицею доставки:

$$P = \|p_i\| \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad (2)$$

де: p_i – обсяг доставки вантажу в i -й пункт доставки; n – кількість пунктів призначення.

Загальна вага перевезень всіх вантажів q_1 із транспортно-логістичного центру до пунктів призначення визначається формулою:

$$q_1 = \sum_{i=2}^n p_i. \quad (3)$$

Поточний обсяг перевезення вантажу q_i на кожному кроці визначається рекурентною формулою:

$$q_i = q_{i-1} - p_{k_{i-1}}, \quad (4)$$

де q_{i-1} – обсяг вантажу на попередньому етапі, $p_{k_{i-1}}$ – обсяг, відвантажений в попередньому пункті доставки.

Зазначимо, що транспортна робота є комплексним показником, що враховує обсяг і відстань перевезення вантажів та визначається їх добутком і вимірюється у т·км. В даному випадку вся множина можливих варіантів перевезення вантажу описується динамічною матрицею транспортної роботи доставки

$$A = \|a_{ij}\| \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Особливість запропонованого методу полягає в тому, що на відміну від класичного підходу оптимізації відстані перевезення [14, 15], елементи матриці транспортної роботи визначаються на кожному кроці динамічно, оскільки їх значення залежить від обсягу відвантаження, яке відбулося на попередньому кроці.

Для n пунктів доставки існує $n \cdot (n-1)$ альтернативних маршрутів доставки, використання одного з яких забезпечує мінімізацію транспортної роботи, а відповідно і витрат з доставки вантажів, тобто є оптимальним [1]. Математичну модель такої задачі можна сформулювати наступним чином: цільова функція оптимізації транспортної задачі, що визначає сумарну транспортну роботу з доставки вантажів до пунктів призначення, запишеться у вигляді:

$$F = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min. \quad (6)$$

У формулі (6) x_{ij} – коефіцієнт переходу із пункту з номером i в пункт із номером j . Кожна змінна x_{ij} дорівнює 0, якщо перехід від i до j не входить у розглянутий маршрут, і дорівнює 1, у випадку включення такого переходу в маршрут. Тоді умова того, щоб кожне місто розміщення пункту доставки було відвідане і залишене лише один раз, описується наступними рівняннями:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad (j = \overline{1, n}); \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad (i = \overline{1, n}). \quad (8)$$

Алгоритм побудови оптимального маршруту перевезення. В даній роботі для побудови розв'язку оптимізаційної задачі (6) – (8) запропоновано застосувати алгоритм побудований на модифікації методу ТВМ. Основна ідея методу полягає в тому, що розгалуження множини припустимих значень на дерево підмножин проводиться за алгоритмом, що базується на побудові оцінок зверху для цільової функції на деякій множині розв'язків. Такий підхід дозволяє організувати повну процедуру перебору можливих варіантів маршрутів для даної задачі.

У відповідності із запропонованим підходом множина M (множина можливих варіантів маршрутів) розбивається на ряд підмножин, що не перетинаються, із яких визначається така підмножина M_r , на якій цільова функція F досягає свого найменшого значення. З урахуванням особливості застосування маршруту розв'язного типу, необхідна умова мінімізації цільової функції (6) забезпечується пріоритетним виконанням заявок із доставки вантажів, що продукують найбільший рівень транспортної роботи. Потім підмножина M_r знову розбивається на ряд підмножин M_{lk} , що не перетинаються, із яких визначається підмножина M_j на якій функція F також досягає свого найменшого значення. Такий процес розгалуження

продовжується до отримання одно елементної множини m , яка в теорії методу гілок і границь називається *рекордом*.

Розглянемо послідовність застосування запропонованого алгоритму на основі модифікації методу гілок і границь для побудови оптимального маршруту доставки вантажів за критерієм мінімізації відповідної транспортної роботи. На першому етапі проводимо аналіз вихідної множини M . Для цього спочатку будуюмо матрицю транспортної роботи. Перший рядок цієї матриці складається з елементів $a_{1j} = q_1 \cdot c_{1j}$. Перший стовпчик цієї матриці фізично означає повернення в пункт постачання після повного розвантаження. І оскільки в пункт постачання транспорт повертається порожнім, то відповідно виконана робота дорівнює нулю. Тобто всі елементи $a_{i1} = 0$. Відповідно надалі будемо розглядати прямокутну матрицю $A = \|a_{ij}\|$ ($i=1, 2, \dots, n; j=2, \dots, n$).

Серед всіх елементів першого рядка $a_{1j} = q_1 \cdot c_{1j}$ ($j=2, \dots, n$) обираємо найменший. Нехай a_{1k_1} – це найменший елемент рядка. Таким чином ми визначаємо, що першою ланкою ланцюга доставки буде перевезення із першого пункту (транспортно-логістичного центру) в k_1 пункт постачання. В цьому пункті буде відвантажено p_{k_1} обсягу вантажу. Тоді для подальшої доставки залишається $q_2 = q_1 - p_{k_1}$. Таким чином всі наступні рядки матриці складаються з елементів $a_{ij}^{k_1} = q_2 \cdot c_{ij}$ ($i=2, \dots, n; j=2, \dots, n$). Матрицю транспортної роботи, побудовану таким чином, позначимо – A_{1k_1} .

Знайдемо оцінку знизу функції якості для підмножини M_{1k_1} . Для матриці транспортної роботи $A_{1k_1} = \|a_{ij}^{k_1}\|$ ($i=1, 2, \dots, n; j=2, \dots, n$) визначимо додаткову матрицю X' мінімальних значень транспортної роботи по рядках (1 в кожному рядку розташована на тому місці, де знаходиться мінімальний елемент цього рядка в матриці A_{1k_1}):

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

По цій матриці знаходимо значення функції цілі F' . Для цього додаємо між собою ті значення $a_{ij}^{k_1}$ з матриці A_{1k_1} , які розташовані на тих же місцях, що і $x_{ij} = 1$ в матриці X' .

$$F'_{k_1} = f(A_{1k_1} X') = a_{1r_1}^{k_1} + a_{2r_2}^{k_1} + a_{3r_3}^{k_1} + \dots + a_{nr_n}^{k_1}, \quad (10)$$

де r_i ($i = \overline{1;n}$) – це номер мінімального елемента в i -тому рядку.

Аналогічно визначаємо додаткову матрицю X'' мінімальних значень транспортної роботи по стовпцях (1 в кожному стовпці розташована на тому місці, де знаходиться мінімальний елемент цього стовбця в матриці A_{1k_1}). При цьому фіксуємо елемент x_{1k_1} , який дорівнюватиме 1.

$$X'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

За значеннями елементів матриці (11) знаходимо значення цільової функції F'' . Для цього додаємо між собою ті значення $a_{ij}^{k_1}$ із матриці A_{1k_1} , які розташовані на тих же місцях, що і $x_{ij} = 1$ в матриці X'' .

$$F''_{k_1} = f(A_{1k_1} X'') = a_{s_2}^{k_1} + a_{s_3}^{k_1} + a_{s_4}^{k_1} + \dots + a_{s_n}^{k_1}, \quad (12)$$

де s_j ($j = \overline{2;n}$) – це номер мінімального елемента в j -тому стовбці.

Нижня оцінка функції якості цільової функції на основі матриць мінімальних значень транспортної роботи за рядками та за стовпцями визначається із співвідношення:

$$F_{k_1}^N = \max(F'_{k_1}; F''_{k_1}). \quad (13)$$

Підмножина M_{1k_1} містить в собі підмножини: $M_{1k_1 2}, M_{1k_1 3}, \dots, M_{1k_1 k_1-1}, M_{1k_1 k_1+1}, \dots, M_{1k_1 n}$.

Далі проводимо аналіз цих підмножин. Для кожної підмножини $M_{1k_1 j} (j = \overline{2, n}; j \neq k_1)$ обчислюємо верхню $F_{1k_1 j}^V$ оцінку функції якості цільової функції.

$$F_{1k_1 j}^V = a_{1k_1}^{k_1} + a_{k_1 j}^{k_1} + a_{j j+1}^{k_1} + \dots + a_{n-1 n}^{k_1} \quad (j = \overline{2, n}; j \neq k_1). \quad (14)$$

Після того, як було обчислено всі значення $F_{1k_1 j}^V (j = \overline{2, n}; j \neq k_1)$ проводимо відсікання безперспективних підмножин. Перспективною для подальшого аналізу буде підмножина, у якій верхнє значення функції якості задовольняє умови

$$Record = \min \left\{ F_{1k_1 j}^V, (j = \overline{2, n}; j \neq k_1) \right\}. \quad (15)$$

Якщо декілька підмножин мають однакове найменше значення, то для цих підмножин обчислюємо нижню оцінку функції якості цільової функції. Для цього для кожної підмножини складаємо додаткові матриці X_j' і X_j'' мінімальних значень транспортної роботи по рядках і по стовпцях. Попередньо в кожній матриці фіксуємо перший рядок і k_1 стовпчик, а також k_1 рядок і j стовпчик. Це означає, що елементи $x_{1k_1}^{k_1}$ і $x_{k_1 j}^{k_1}$ в цих матрицях дорівнюватимуть одиниці. По цих матрицях знаходимо значення функцій цілі $F_{k_1 j}'$ і $F_{k_1 j}''$. Для цього додаємо між собою ті значення $a_{ij}^{k_1}$ з матриці A_{1k_1} , які розташовані на тих же місцях, що і $x_{ij}^{k_1} = 1$ в матрицях X_j' і X_j'' .

$$F_{k_1 j}' = f(A_{1k_1} X_j') = a_{1k_1}^{k_1} + a_{k_1 j}^{k_1} + a_{2r_2}^{k_1} + \dots + a_{nr_n}^{k_1}, \quad (16)$$

де $r_i (i = \overline{1, n})$ – це номер мінімального елемента в i -тому рядку.

$$F_{k_1 j}'' = f(A_{1k_1} X_j'') = a_{1k_1}^{k_1} + a_{k_1 j}^{k_1} + a_{s_2 2}^{k_1} + a_{s_3 3}^{k_1} + \dots + a_{s_n n}^{k_1}, \quad (17)$$

де $s_j (j = \overline{2, n})$ – це номер мінімального елемента в j -тому стовбці.

Нижня оцінка функції якості цільової функції на основі матриць мінімальних значень транспортної роботи за рядками та за стовпцями визначається із співвідношення:

$$F_{k_1 j}^N = \max(F_{k_1 j}', F_{k_1 j}''). \quad (18)$$

Серед підмножин, які мають однакове найменше значення верхньої оцінки, обираємо ту, в якій $F_{k_1 j}^N$ найменше.

Нехай мінімум $F_{1k_1 j}^V$ досягається при $j = k_2$ і $F_{k_1 j}^N$ – найменше при $j = k_2$. Тобто найперспективнішою вважаємо підмножину $M_{1k_1 k_2}$. Оскільки з пункту k_1 вантаж потрапляє в пункт k_2 , в ньому буде відвантажено p_{k_2} об'єм вантажу. Тоді для подальшої доставки залишається $q_3 = q_2 - p_{k_2}$. Таким чином всі наступні рядки матриці складаються з елементів $a_{ij}^{k_2} = q_3 \cdot c_{ij} (i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n)$. Матрицю, побудовану таким чином, назовемо $A_{1k_1 k_2}$.

Підмножина $M_{1k_1 k_2}$ містить в собі підмножини: $M_{1k_1 k_2 2}, M_{1k_1 k_2 3}, \dots, M_{1k_1 k_2 k_1-1}, M_{1k_1 k_2 k_1+1}, \dots, M_{1k_1 k_2 k_2-1}, M_{1k_1 k_2 k_2+1}, \dots, M_{1k_1 k_2 n}$.

Далі проводимо аналіз кожної з цих підмножин обчислюємо верхню $F_{1k_1 k_2 j}^V$ і нижню $F_{k_1 k_2 j}^N$ оцінку функції якості цільової функції, виконуючі аналогічні дії, як для підмножин $M_{1k_1 2}, M_{1k_1 3}, \dots, M_{1k_1 k_1-1}, M_{1k_1 k_1+1}, \dots, M_{1k_1 n}$, за формулами (14)–(18). Після цього визначаємо найперспективнішу підмножину.

Цей процес розгалуження продовжується до отримання підмножини $M_{1k_1 k_2 \dots k_n}$, яка складається з одного елемента. Таким чином визначається оптимальний маршрут: $1 \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_n \rightarrow 1$, з поверненням в початковий пункт. При цьому оптимальне значення цільової функції визначається так:

$$F^* = q_1 c_{1k_1} + q_2 c_{k_1 k_2} + q_3 c_{k_2 k_3} + \dots + q_n c_{k_{n-1} k_n}. \quad (19)$$

Схема побудови дерева розв'язків за наведеним алгоритмом має вигляд наведений на рис. 1.

Приклад застосування запропонованого підходу. Розглянемо алгоритм застосування запропонованого методу для побудови оптимального маршруту доставки готової продукції із транспортно-логістичного центру розташованого в місті Дніпро до п'яти районних баз збуту розташованих на території області: ПП₁, ПП₂, ПП₃, ПП₄, ПП₅, ПП₆. Матриця відстаней від центру до пунктів призначення та між ними визначена даними наведеними в табл. 1, а обсяги відправлення та доставки вантажів задані у відповідності з даними табл. 2.

Вихідна область планів M допускає розгалуження на непересічні підмножини: $M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{16}$.

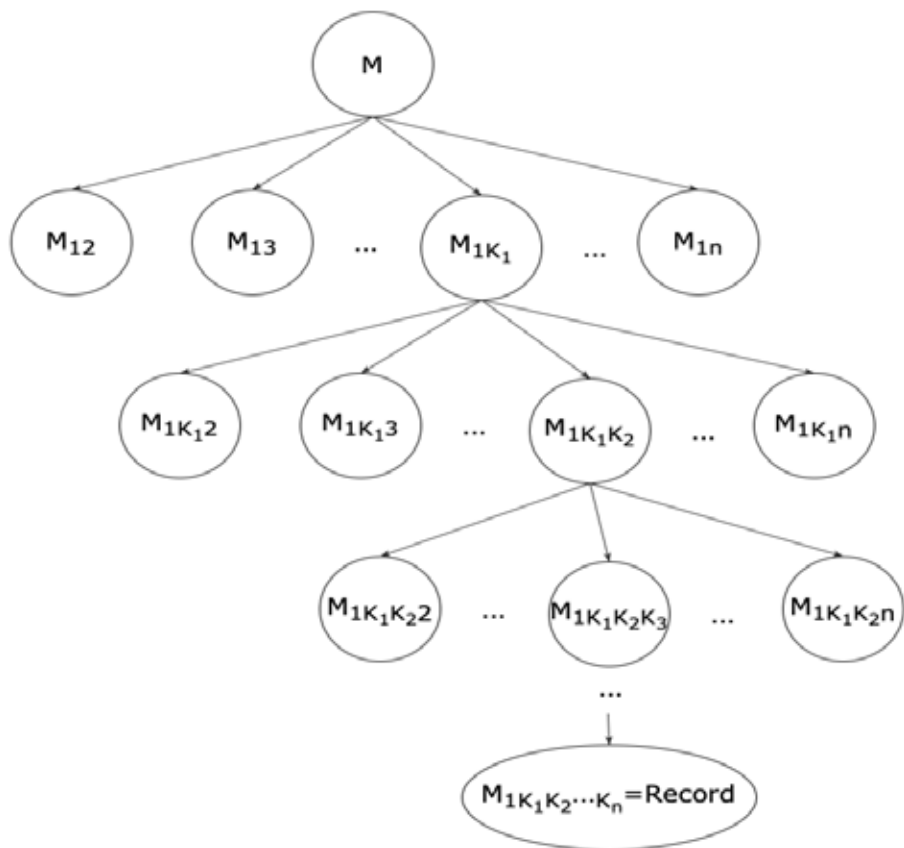


Рис. 1. Схема побудови розв'язку методом гілок та границь

Таблиця 1

Матриця відстаней доставки вантажів

№ з/п	Пункт призначення	Відстані					
		1	2	3	4	5	6
1	Дніпро	0	101	45	31	77	80
2	ПП ₂	101	0	155	100	50	140
3	ПП ₃	45	155	0	63	45	130
4	ПП ₄	31	100	63	0	58	50
5	ПП ₅	77	50	45	58	0	101
6	ПП ₆	80	140	130	50	101	0

Таблиця 2

Матриця обсягів перевезення вантажів

№ з/п	Характеристика вантажу	Пункт призначення					
		Дніпро	ПП ₂	ПП ₃	ПП ₄	ПП ₅	ПП ₆
1	Обсяг перевезення	3	0,7	0,4	0,8	0,6	0,5

Проаналізуємо значення функцій якості та відповідну величину транспортної роботи за маршрутами для кожної підмножини окремо. Перший стовпчик цієї матриці фізично означає повернення в пункт постачання після повного розвантаження. Оскільки в пункт постачання транспорт повертається порожнім, то відповідно виконана робота дорівнює нулю, тобто всі елементи $a_{i1} = 0$. Так як відправний пункт розміщення ТЛЦ – Дніпро, то для визначення транспортної роботи із доставки вантажу в перший пункт призначення перший рядок необхідно помножити на $a_1 = 3$ – обсяг всього вантажу:

0	303	135	93	231	240
0	0	155	100	50	140
0	155	0	63	45	130
0	100	63	0	58	50
0	50	45	58	0	101
0	140	130	50	101	0

Вибираємо найменше значення у першому рядку, це і буде перша ланка шуканого маршруту: $1 \rightarrow 4$.

Далі, будемо нову матрицю з урахуванням того, що було доставлено вантаж до ПП₄ (0,8 т). Перший рядок обираємо із попереднього кроку, усі інші елементи матриці визначаємо як добуток значень вихідної матриці і об'єму вантажу, який залишився $q_2 = q_1 - p_4 = 3 - 0,8 = 2,2$ т:

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 303 & 135 & 93 & 231 & 240 \\ 0 & 341 & 220 & 110 & 308 \\ 341 & 0 & 138,6 & 99 & 286 \\ 220 & 138,6 & 0 & 127,6 & 110 \\ 110 & 99 & 127,6 & 0 & 222,2 \\ 308 & 286 & 110 & 222,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Знайдемо оцінку знизу функції якості для підмножини M_{14} . Для матриці транспортної роботи A_{14} визначимо додаткову матрицю X' мінімальних значень транспортної роботи по рядках

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По цій матриці знаходимо значення функції цілі F'_4

$$F'_4 = 93 + 110 + 99 + 110 + 99 + 110 = 621. \quad (20)$$

Аналогічно визначаємо додаткову матрицю X'' мінімальних значень транспортної роботи по стовпцях. Фіксуємо елемент x_{14} , який дорівнюватиме 1, а всі інші елементи в першому рядку і 4 стовпчику дорівнюватимуть 0.

$$X'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По цій матриці знаходимо значення функції цілі F'' .

$$F''_4 = 93 + 110 + 99 + 110 + 99 = 511. \quad (21)$$

Нижня оцінка функції якості цільової функції на основі матриць мінімальних значень транспортної роботи за рядками та за стовпцями дорівнює:

$$F_4^N = \max(F'_4; F''_4) = 621. \quad (22)$$

Визначимося з подальшим розгалуженням. Підмножина M_{14} містить в собі підмножини: M_{142} , M_{143} , M_{145} , M_{146} . Далі проводимо аналіз цих підмножин. Для кожної підмножини M_{14j} ($j = \overline{2;6}$, $j \neq 4$)

обчислюємо верхню F_{14j}^V оцінку функції якості цільової функції. Розпочинаємо з M_{142} із початковим планом $I_{142} = (1, 4, 2, 3, 5, 6)$. За цим планом величина транспортної роботи має значення:

$$F_{142}^V = 93 + 220 + 341 + 99 + 222,2 = 975,2. \quad (23)$$

Аналогічно обчислюємо верхні границі функції якості для кожної підмножини M_{14j} ($j = \overline{2;6}, j \neq 4$). Отримаємо наступні значення.

$$F_{143}^V = 93 + 138,6 + 99 + 222,2 + 308 = 860,8; \quad (24)$$

$$F_{145}^V = 93 + 127,6 + 110 + 341 + 286 = 957,6; \quad (25)$$

$$F_{146}^V = 93 + 110 + 222,2 + 110 + 341 = 876,2. \quad (26)$$

Оскільки всі верхні границі різні не має сенсу обчислювати нижні границі, а відповідно безперспективні підмножини відсікаються:

$$Record = \min \{ F_{142}^V, F_{143}^V, F_{145}^V, F_{146}^V \} = 860,8. \quad (27)$$

Перспективною для подальшого аналізу буде підмножина M_{143} , у якій верхнє значення функції якості виявилось найменшим. Вихідна область планів даної підмножини допускає розгалуження на непересічні підмножини: M_{1432} , M_{1435} , M_{1436} .

Будуємо нову матрицю транспортної роботи A_{143} . Враховуючи те, що було доставлено вантаж до ППЗ (0,4 т), кількість вантажу, який необхідно доставити, складає 1,8 т. Оскільки відбулося перевезення $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$, то перший і четвертий рядки та четвертий і третій стовпчики фіксуємо з попередньої матриці (значення в стовпцях розраховуємо з другого тому, що перший стовпчик повністю складений з нулів), а всі інші елементи матриці обчислюємо як $1,8 \cdot c_{ij}$ (c_{ij} – коефіцієнти матриці відстаней). Отже, нова матриця матиме вигляд

$$A_{143} = \begin{bmatrix} -303 & -135 & -93 & -231 & -240 \\ 0 & 341 & 220 & 90 & 252 \\ 279 & 0 & 138,6 & 81 & 234 \\ -220 & -138,6 & 0 & -127,6 & -110 \\ 90 & 99 & 127,6 & 0 & 181,8 \\ 252 & 286 & 90 & 181,8 & 0 \end{bmatrix}$$

Проаналізуємо значення функції якості та відповідних величин транспортної роботи за маршрутом для кожної підмножини окремо. Всі дії виконуємо аналогічно як при аналізі підмножин M_{14j} . Значення верхньої границі функції якості наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Значення верхньої границі функції якості підмножин M_{143j}

j	2	5	6
F_{143j}^V	782,4	654,6	737,4

За даними табл. 3 проводимо відсікання безперспективних підмножин, обираємо найменшу з верхніх границь

$$Record = \min \{ F_{1432}^V, F_{1435}^V, F_{1436}^V \} = 654,6. \quad (28)$$

Підмножина M_{1435} має найменшу верхню границю функції якості. Отже, надалі будемо розглядати цю підмножину, яка допускає розгалуження на M_{14352} , M_{14356} . Будуємо нову матрицю транспортної роботи A_{1435} . Враховуючи те, що було доставлено вантаж до ППЗ (0,6 т), кількість вантажу, який необхідно доставити, складає 1,2 т. Фіксуємо з попередньої матриці третій рядок і п'ятий стовпчик, а всі інші елементи матриці обчислюємо як $1,2 \cdot c_{ij}$ (c_{ij} – коефіцієнти матриці відстаней). Отже, нова матриця матиме вигляд

$$A_{1435} = \begin{bmatrix} -303 & -135 & -93 & -231 & -240 \\ 0 & 341 & 220 & 90 & 168 \\ -279 & 0 & -138,6 & 81 & -234 \\ -220 & -138,6 & 0 & -127,6 & -110 \\ 60 & 99 & 127,6 & 0 & 121,2 \\ 168 & 286 & 90 & 181,8 & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогічно до аналізу попередніх підмножин, наведемо значення верхньої границі функції якості для розглянутих підмножин M_{14352} , M_{14356} :

$$F_{14352}^V = 93 + 138,6 + 81 + 60 + 168 = 540,6; \quad (29)$$

$$F_{14356}^V = 93 + 138,6 + 81 + 121,2 + 168 = 601,8; \quad (30)$$

$$Record = \min \{ F_{14352}^V, F_{14356}^V \} = 540,6. \quad (31)$$

Аналіз значень побудованих підмножини (29) – (31) дозволяє визначити оптимальне значення цільової функції F^* , яке становить:

$$F^* = 93 + 138,6 + 81 + 60 + 168 = 540,6 \text{ т·км}. \quad (32)$$

Таким чином, відповідна схема оптимального маршруту за критерієм мінімізації транспортної роботи з доставки вантажів у п'ять пунктів призначення визначається так:

$$\text{Дніпро} \rightarrow \text{ПП}_4 \rightarrow \text{ПП}_3 \rightarrow \text{ПП}_5 \rightarrow \text{ПП}_2 \rightarrow \text{ПП}_6 \rightarrow \text{Дніпро}.$$

Висновки. Аналіз результатів проведеного дослідження показує, що запропонований на основі методу гілок і границь алгоритм дозволяє визначити оптимальний розв'язок задачі зі значним скороченням аналізу можливих варіантів мінімальних маршрутів доставки за рахунок відсікання неперспективних гілок (множин). Зазначимо, що такий підхід допускає узагальнення для побудови оптимальних маршрутів доставки вантажів до пунктів призначення з мінімізацією відповідних логістичних ланцюгів. Цей метод дозволяє знаходити оптимальні маршрути для автомобільних перевезень вантажів, забезпечуючи мінімізацію витрат і підвищення ефективності транспортної логістики. Застосування запропонованого підходу для вирішення практичних задач дозволить транспортним компаніям значно покращити якість перевезень та скоротити логістичні витрати. Подальші дослідження можуть бути зосереджені на розробці гібридних алгоритмів, що поєднують застосування методу гілок і границь з елементами штучного інтелекту для підвищення швидкості обчислень та адаптивності з урахуванням динаміки транспортних потоків.

Список використаних джерел:

1. Land A.H., and Doig A.G. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrics*. 1960. Vol 28. P.497–520.
2. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An Algorithm for the Traveling Salesman Problem. *Operations Research*. 1963. Vol. 11, № 6. P.972–989.
3. Munapo E. A Return to the traveling salesman model: a network branch and bound approach. *South African Journal of Economic and Management Sciences*. 2013. Vol 16, № 1. P.52–63.
4. Walton P. C., do Nascimento R. Q., Pessoa A.A., Subramanian A.A. Branch-and-Bound Algorithm for the Close-Enough Traveling Salesman Problem. *Inform Journal on Computing*. 2016. Vol 28, № 4. P.752–765.
5. Rastogi A., Shrivastava A. Kumar, Payal N., Singh R. A Proposed Solution to Travelling Salesman Problem using Branch and Bound. *International Journal of Computer Applications*. 2013. Vol 65, № 5. NY, USA. P.44–49.
6. Suyudi M., Sukono S., Mamat M., Bon A.T. Solving Traveling Salesman Problems Using Branch and Bound Methods. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*. Pilsen, Czech Republic. 2019. P.1606–1614.
7. Markevich E., Trushechkin A. Quantum Branch-and-Bound Algorithm and its Application to the Travelling Salesman Problem. *Mathematical Sciences. Springer Science and Business Media LLC*. 2019. № 2. P.168–184.
8. Wiener R. Branch and Bound Implementations for the Traveling Salesperson Problem. *Object Technology*. 2003. Vol. 2, № 2. P.65–86.
9. Ropke S., Cordeau J.-F., Laporte G. Models and branch-and-cut algorithms for pickup and delivery problems with time windows. *Networks*. 2007. Vol 49, № 4. P.258–272.

10. Inayatullah S., Riaz W., Jafree H.A., Siddiqi T.A., Imtiaz M., Naz S., Hassan S.A. A Note on Branch and Bound Algorithm for Integer Linear Programming. *Current Journal of Applied Science and Technology*. 2019. Vol 34, № 6. P.1–6.

11. Крижанівський Б. Використання методу гілок і меж при розв'язанні задач лінійного цілочислового програмування. Матеріали науково-технічної конференції «Наука. Освіта. Молодь». Умань. 2016. URL: https://library.udpu.edu.ua/library_files/stud_konferenzia/2016_1/85.pdf.

12. Мельник І.М., Піднебесна Г.А. Особливості застосування методу гілок і границь для розв'язання задачі вибору оптимальної регресійної моделі. *Індуктивне моделювання складних систем*. 2012. № 4. С. 128–135.

13. Козар Л. М., Романович Є. В., Афанасов Г. М. Методи транспортної логістики : навчальний посібник. Харків: УкрДАЗТ. 2015. 175 с.

14. Пасічник А.М., Худа Ж.В., Циба В.В. Метод оптимізації роботизованої транспортної системи портової переробки вантажопотоку. *Системи та технології*. 2023. В.66, № 2. С. 5–12.

15. Пасічник А.М., Худа Ж.В., Циба В.В. Оптимізація маршрутів автомобільних перевезень вантажів із застосуванням методу гілок і границь. Мат. III міжн. наук.-практ. конф. «Сучасні дослідження: транспортна інфраструктура та інноваційні технології». Київ: ДУІТ. 2024. Ч.2. С. 280–283.

References:

1. Land A.H., and Doig A.G. (1960). An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrics*, (28), 497–520.

2. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. (1963). An Algorithm for the Traveling Salesman Problem. *Operations Research*, (11, 6), 972–989.

3. Munapo E. A (2013). Return to the traveling salesman model: a network branch and bound approach. *South African Journal of Economic and Management Sciences*, (16, 1), 52–63.

4. Walton P. C., do Nascimento R. Q., Pessoa A.A., Subramanian A. A (2016). Branch-and-Bound Algorithm for the Close-Enough Traveling Salesman Problem. *Inform Journal on Computing*, (28, 4), 752–765.

5. Rastogi A., Shrivastava A. Kumar, Payal N., Singh R. (2013). A Proposed Solution to Travelling Salesman Problem using Branch and Bound. *International Journal of Computer Applications*. NY, USA, (65, 5), 44–49.

6. Suyudi M., Sukono S., Mamat M., Bon A.T. (2019). Solving Traveling Salesman Problems Using Branch and Bound Methods. Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management. Pilsen, Czech Republic, 606–1614.

7. Markevich E., Trushechkin A. (2019). Quantum Branch-and-Bound Algorithm and its Application to the Travelling Salesman Problem. *Mathematical Sciences*. № 2, Springer Science and Business Media LLC, 168–184.

8. Wiener R. (2003). Branch and Bound Implementations for the Traveling Salesperson Problem. *Object Technology*, (2, 2), 65–86.

9. Ropke S., Cordeau J.-F., Laporte G. (2007). Models and branch-and-cut algorithms for pickup and delivery problems with time windows. *Networks*, (49, 4), 258–272.

10. Inayatullah S., Riaz W., Jafree H.A., Siddiqi T.A., Imtiaz M., Naz S., Hassan S.A. (2019). A Note on Branch and Bound Algorithm for Integer Linear Programming. *Current Journal of Applied Science and Technology*, (34), 6, 1–6.

11. Kryzhanivskyi B. (2016). Vykorystannia metodu hilok i mezh pry rozv'iazanni zadach liniinoho tsilochyslovoho prohramuvannia [Using the twig and boundary method when solving linear integer programming problems]. Materialy naukovo-tekhnichnoi konferentsii «Nauka. Osvita. Molod». Uman. URL: https://library.udpu.edu.ua/library_files/stud_konferenzia/2016_1/85.pdf [in Ukrainian].

12. Melnyk I.M., Pidnebesna H.A. (2012). Osoblyvosti zastosuvannia metodu hilok i hranyts dla rozv'iazannia zadachi vyboru optymalnoi rehresiinoi modeli [Features of using the twig and boundary method to solve the problem of choosing the optimal regression model]. *Induktyvne modeliuвання skladnykh system*, (4), 128–135 [in Ukrainian].

13. Kozar L. M., Romanovych Ye. V., Afanasov H. M. (2015). Metody transportnoi lohistyky [Transport logistics methods]: navchalnyi posibnyk. Kharkiv: UkrDAZT [in Ukrainian].

14. Pasichnyk A.M., Khuda Zh.V., Tsyba V.V. (2023). Metod optymizatsii robotyzovanoi transportnoi systemy portovoi pererobky vantazhopotoku [Method for optimizing a robotic transport system for port cargo processing]. *Systemy ta tekhnolohii*. (66, 2), 5–12 [in Ukrainian].

15. Pasichnyk A.M., Khuda Zh.V., Tsyba V.V. (2024). Optymizatsiia marshrutiv avtomobilnykh perevezen vantazhiv iz zastosuvanniam metodu hilok i hranyts [Optimization of road freight routes using the twig and boundary method]. Мат. III mizhn. nauk.-prakt. конф. «Suchasni doslidzhennia: transportna infrastruktura ta innovatsiini tekhnolohii» (2), 280–283). Kyiv [in Ukrainian].