

Мотайло А. П., кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри природничо-наукової підготовки
Херсонської державної морської академії
ORCID: 0000-0002-6775-5788

ВИЗНАЧЕННЯ МЕТРИК ЯКОСТІ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА В ФОРМІ БІПІРАМІДИ

У статті розглянуто метричні властивості скінченного елемента в формі біпіраміди, яка має один/два/три рухомих вузли. Основною задачею даного дослідження є визначення умов використання біпіраміди, яка не є правильним багатогранником, при побудові скінченно-елементної сітки.

У роботі знайдено чотири основні показники якості біпіраміди: якість елемента, співвідношення сторін, асиметрія та якість ортогональності. Усі обчислення виконано за правилами, які використовують у ANSYS.

За формулою для 3D-елементів знайдено інтервальну оцінку метрики якості елемента, яка визначає межі застосування біпірамід при дискретизації області методом скінченних елементів у задачах лінійної механіки, теорії пружності та теплопровідності.

На основі аналізу співвідношення сторін граней біпіраміди отримано формулу для обчислення показника якості біпіраміди, яка має один/два/три рухомих вузли. Межі застосування даної формули визначаються правилами, які діють для показника співвідношення сторін в ANSYS Mechanical, Elecromagnetics та CFX.

У роботі знайдено інтервальні оцінки для показника асиметрії біпіраміди з одним/двома/трьома рухомими вузлами, які дозволяють задовольнити вимоги ANSYS до якості сітки на рівні good та excellent. Отримані оцінки є обмеженнями для величин внутрішніх кутів граней біпіраміди, які є функціями параметрів видовження/стиснення півосей багатогранника. Виявлені залежності між відмінними від нуля координатами вершин грані біпіраміди та величинами її кутів спрощують алгоритм перевірки показника якості асиметрії.

У роботі визначено метрику якості ортогональності в вигляді функції параметрів видовження/стиснення біпіраміди. На основі аналізу множини значень даної функції встановлено, що незалежно від параметрів біпіраміди показник якості ортогональності приймає додатні значення. Згідно з вимогами, що висуваються в ANSYS, додатна визначеність якості ортогональності є достатньою умовою для використання елементів неправильної геометричної форми при генерації скінченно-елементних сіток.

Отримані результати містять формули та інтервальні оцінки, які можуть бути застосовані при алгоритмізації метода скінченних елементів.

Перспективою подальших досліджень є розробка алгоритму дискретизації 3D-областей сіткою тетраедрально-октаедральної структури та проведення обчислювальних експериментів методом скінченних елементів.

Ключові слова: скінченний елемент, біпіраміда, метрики якості, якість елемента, співвідношення сторін, асиметрія, якість ортогональності.

Motailo A. P. Determining the quality metrics of a finite element in the shape of a bipyramid

The article deals with the metric properties of a finite element in the shape of a bipyramid with one/two/three moving nodes. The main task of this study is to determine the conditions for using the bipyramid, which is not a regular polyhedron, in the constructing of a finite element mesh.

Four main indices of bipyramid quality were obtained in this paper: Element Quality, Aspect Ratio, Skewness, and Orthogonal Quality. All calculations were made according to the rules used in ANSYS.

Using the formula for 3D elements, an interval estimate of the element quality metric is found, which determines the limits of bipyramids application in the discretization of the domain by the Finite Element Method in problems of linear mechanics, elasticity and thermal conductivity.

Based on the analysis of the Aspect Ratio of the bipyramid faces, a formula for calculating the quality index of a bipyramid with one/two/three moving nodes is obtained. The limits of application of this formula are determined by the rules that apply to the Aspect Ratio in ANSYS Mechanical, Elecromagnetics and CFX.

In this paper, interval estimates are found for the asymmetry index of the bipyramid with one/two/three moving nodes, which allow satisfying the ANSYS mesh quality requirements at the good and excellent levels. The obtained estimates are constraints on the values of the internal angles of the bipyramid faces, which are functions of the parameters of elongation/compression of the polyhedron semi-axes. The identified dependencies between the coordinates of the bipyramid vertices and the values of its angles, which are different from zero, simplify the algorithm for checking the asymmetry quality indicator.

In this paper, Orthogonal Quality metric is found in the form of a function of the bipyramid elongation/compression parameters. Based on the analysis of the function's set of values, it is established that, regardless of the bipyramid parameters, Orthogonal Quality indicator takes positive values. According to the requirements set forth in ANSYS, positive- definite Orthogonal Quality is a sufficient condition for the use of irregular geometric shape elements in the Finite Element Mesh Generation.

The obtained results contain formulas and interval estimates that can be used in the finite element method algorithmization.

The prospect of further research is to develop an algorithm for 3D-discretizing with a tetrahedral-octahedral mesh and carry out computational experiments using the Finite Element Method.

Key words: finite element, bipyramid, quality metrics, Element Quality, Aspect Ratio, Skewness, Orthogonal Quality.

Постановка проблеми. Генерація скінченно-елементних сіток є важливим етапом розв'язання граничних задач методом скінченних елементів (МСЕ). Даний етап супроводжується перевіркою вимог, які висуваються до неструктурованих початкових сіток скінченних елементів (СЕ). Ці вимоги стосуються визначення метрик СЕ, які дозволяють встановити, чи має згенерована сітка достатню якість для проведення обчислювального аналізу. Це є особливо актуальним для сіток, які містять СЕ, що не представлені в бібліотеках систем скінченно-елементного аналізу (СЕА) ANSYS, ABAQUS тощо.

При генерації сітки тетраедрально-октаедральної структури необхідно враховувати геометрію СЕ, які утворюються шляхом винесення деяких вузлів на границю розрахункової області. Комірки, які є результатом видовження/стиснення півосей октаедрів, мають форму біпіраміди. Відомо, що СЕ неправильної геометричної форми негативно впливають на апроксимаційні властивості скінченно-елементної сітки. Тому для отримання якісної сітки доводиться виконувати перевірку умов, яким мають задовольняти метричні показники СЕ. Вказані умови визначають небажані елементи, які можна видалити або замінити іншими СЕ, що покращує якість сітки на кожному кроці дискретизації. При цьому біпіраміди не використовуються відомими системами СЕА, отже, актуальною є задача визначення умов їх використання в МСЕ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] вивчено апроксимаційні властивості СЕ в формі біпіраміди, яка має один/два/три рухомих вузли. Аналіз виконано на основі дослідження на мінімум сліду матриці жорсткості біпіраміди з шістьма та сімома вузлами інтерполяції. При цьому мінімальний слід матриці жорсткості вважається найкращою характеристикою апроксимації в області біпіраміди. У вказаній роботі знайдено інтервальні оцінки, яким мають задовольняти параметри видовження/стиснення біпіраміди, що відповідають межах відхилення об'єму біпіраміди від об'єму октаедра на 10% та 25%. У роботі прогнозується, що такі відхилення мають задовольнити відповідно високі та достатні вимоги до якості сітки, яка містить комірки в формі біпіраміди. Але дане припущення потребує перевірки обчислювальним експериментом.

У роботі [2] визначено показники якості Aspect Ratio та Jacobian Ratio для біпіраміди, яка має один/два/три рухомих вузли. Дані метричні характеристики знайдено за правилами, які використовуються розв'язувачами Altair HyperMesh та ANSYS. При цьому показник Aspect Ratio отримано як максимальне співвідношення найдовшого ребра СЕ до найкоротшого. Для біпіраміди, яка має один/два/три рухомих вузли, Aspect Ratio є функцією параметрів видовження/стиснення біпіраміди, яка задовольняє системі нерівностей за умови, що значення Aspect Ratio не перевищує п'яти. Дане обмеження, яке прийнято в Altair HyperMesh, дозволяє отримати геометричну інтерпретацію розв'язків побудованих систем нерівностей в залежності від співвідношень довжин ребер біпіраміди. При цьому залишається невизначеним питання про метрику якості Aspect Ratio, яка є максимальним значенням співвідношень сторін або радіусів описаного та вписаного кіл граней біпіраміди, що використовують в ANSYS.

На основі обмежень, які прийнято для показника Jacobian Ratio в Altair HyperMesh та ANSYS, отримано інтервальну оцінку для значень параметрів видовження/стиснення біпіраміди. При цьому залишається невизначеним питання про відповідність СЕ в формі біпіраміди іншим показникам якості, які використовують системи СЕА.

Метою статті є визначення чотирьох основних показників якості СЕ в формі біпіраміди за правилами, які використовують в ANSYS для 3D-елементів.

Виклад основного матеріалу. Розглядається СЕ у формі біпіраміди, яка має шість вузлів інтерполяції, що розташовані в її вершинах (рис. 1). Точки K_1, K_2, K_3 знаходяться на відстанях r, p, q від центра багатогранника K_0 . Решта вершин біпіраміди є рівновіддаленими від точки K_0 на відстань, яка дорівнює одиниці.

Якість елемента [Element Quality]. Визначення Element Quality (EQ) надає комбіновану метрику якості в ANSYS, значення якої коливаються в межах від нуля до одиниці. Дана метрика є відношенням об'єму до квадратного кореня з куба суми квадратів довжин ребер 3D-елементів [3]. Для біпіраміди з трьома рухомих вузлами (рис. 1) значення EQ є функцією параметрів r, p, q :

$$EQ = \frac{1}{48} \frac{(r+1)(p+1)(q+1)}{\sqrt{(3+r^2+p^2+q^2)^3}}, \quad (1)$$

де $r, p, q > 0$.

Дослідження на екстремум функції $EQ(r, p, q)$ показало, що в стаціонарній точці (1,1,1) яка є точкою перетину поверхонь $\partial EQ / \partial r = 0, \partial EQ / \partial p = 0, \partial EQ / \partial q = 0$ (рис. 2а, 2б), досягається максимум $EQ(r, p, q)$, що дорівнює 0.01134023029.

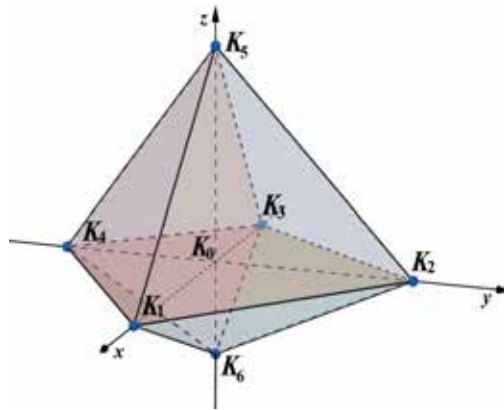


Рис. 1. Біпіраміда як скінченний елемент

Джерело: побудовано автором в СКА GeoGebra

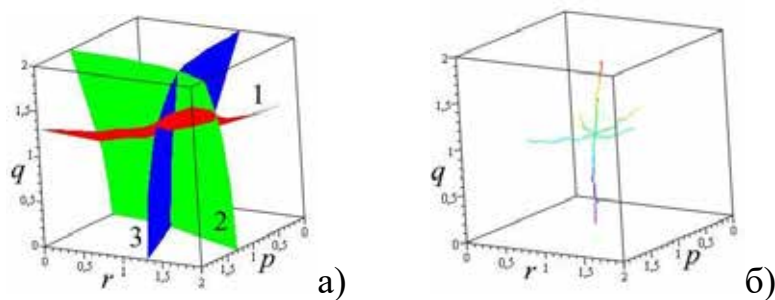


Рис. 2. Стационарна точка функції $EQ(r, p, q)$:

а) поверхні нульового рівня функцій $1 - \partial EQ / \partial r$, $2 - \partial EQ / \partial p$, $3 - \partial EQ / \partial q$; б) перетин поверхонь 1, 2, 3

Джерело: побудовано автором в СКА Maple

Мінімальне значення $EQ(r, p, q)$ залежить від верхніх меж допустимих значень r, p, q та може виявитись близьким до нуля. Згідно з критеріями якості сітки, які рекомендовано в ANSYS, мінімальною границею похибки для 3D-елементів є значення $EQ = 5 \cdot 10^{-4}$. Дане обмеження якості СЕ використовується розв'язувачами Standard Mechanical, Aggressive Mechanical та Nonlinear Mechanical для отримання валідних сіток, які не містять небажаних елементів [4]. Застосовуючи критерій мінімальної границі до біпіраміди з одним/двома/трьома рухомими вузлами, можна отримати інтервальну оцінку для значень функції $EQ(r, p, q)$:

$$0.0005 \leq EQ(r, p, q) \leq 0.01134023029. \quad (2)$$

На рис. 3 зображено поверхні рівня функції $EQ(r, p, q)$, які задовольняють умові (2).

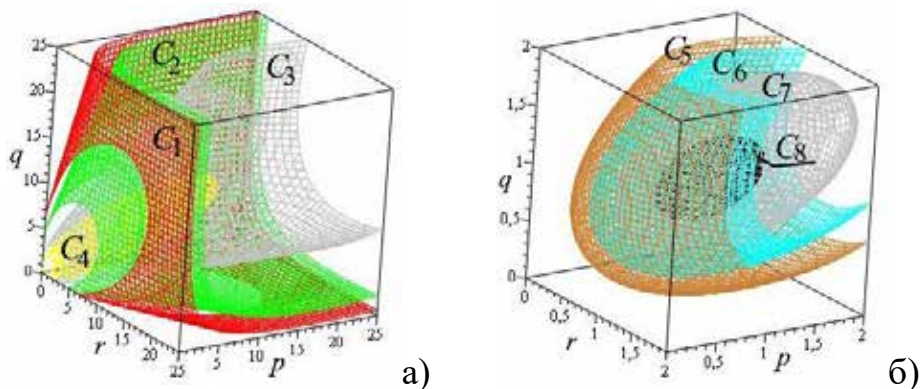


Рис. 3. Поверхні рівня $EQ(r, p, q) = C_i$:

а) $C_1=0.0005$, $C_2=0.001$, $C_3=0.003$, $C_4=0.005$; б) $C_5=0.008$, $C_6=0.009$, $C_7=0.01$, $C_8=0.011$

Джерело: побудовано автором у СКА Maple

Аналізуючи геометричне представлення функції $EQ(r,p,q)$, слід зауважити, що найменше для біпіраміди значення $EQ=0.0005$ досягається за умови, що один з її параметрів r, p, q є більшим за 6.589.

Співвідношення сторін [Aspect Ratio]. Визначення Aspect Ratio (AR) в ANSYS для 3D-елементів виконується для кожної грані окремо. При цьому для трикутників та прямокутників застосовуються різні методи обчислення. Загальним значенням AR вважається співвідношення сторін найгіршої грані поліедра [5].

За правилом [6], яке застосовується для трикутників, необхідно:

- 1) побудувати медіану до однієї з сторін трикутника та середню лінію, що перетинає дві інших сторони (рис. 4а);
- 2) побудувати прямокутники, що проходять через середини сторін (рис. 4б);
- 3) повторити побудови для інших двох медіан та середніх ліній трикутника;
- 4) вважати значенням AR найбільше з шести відношень довгої сторони прямокутника до коротшої, яке поділене на квадратний корінь з трьох.

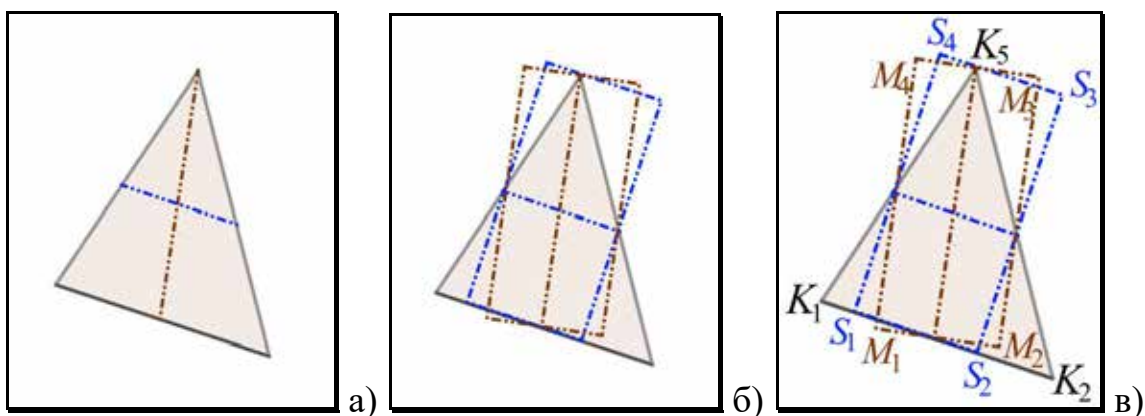


Рис. 4. Додаткові побудови для обчислення AR

Джерело: побудовано автором в СКА GeoGebra

Згідно з правилом [6] показник якості AR приймає значення, що не менше одиниці. При цьому значення одиниця відповідає СЕ правильної геометричної форми (октаєдр для біпіраміди).

Для визначення AR біпіраміди (рис. 1) достатньо знайти співвідношення сторін для грані $K_1K_2K_3$, яке є функцією параметрів r, p, q . Тоді AR для решти граней біпіраміди можна отримати при фіксованих значеннях $r=1$ або $p=1$ або $q=1$.

У прямокутниках $M_1M_2M_3M_4$ та $S_1S_2S_3S_4$, які побудовано для вершини K_5 (рис. 4в), співвідношення сторін є функціями:

$$k_1 = \frac{M_1M_4}{M_1M_2} = \frac{2\sqrt{r^2p^2 + p^2q^2 + q^2r^2}}{r^2 + p^2 + 4q^2}, k_2 = \frac{M_1M_2}{M_1M_4} = \frac{r^2 + p^2 + 4q^2}{2\sqrt{r^2p^2 + p^2q^2 + q^2r^2}}, \quad (3)$$

$$k_3 = \frac{S_1S_4}{S_1S_2} = \frac{2\sqrt{r^2p^2 + p^2q^2 + q^2r^2}}{r^2 + p^2}, k_4 = \frac{S_1S_2}{S_1S_4} = \frac{r^2 + p^2}{2\sqrt{r^2p^2 + p^2q^2 + q^2r^2}}, \quad (4)$$

де $r, p, q > 0$.

Для дослідження на максимум функцій $k_i(r,p,q)$, де $i=1,4$, знайдено залежності параметра q від інших двох параметрів r, p та сталої C_p , яку асоційовано з рівняннями поверхонь рівня $k_i(r,p,q)=C_i$ ($C_i > 0$). Додатково, на основі аналізу геометричного представлення функцій k_i поверхнями рівня, визначено умови, за яких $q(r,p,C_i) > 0$ в області, де $r,p > 0$ (табл. 1).

За результатами дослідження в табл. 1 можна зробити висновок, що відношення $k_1 = \frac{M_1M_4}{M_1M_2} < 0.5$,

тобто відрізок M_1M_2 є довшим за M_1M_4 для будь-яких допустимих значень r, p, q . Отже, найбільшим значенням співвідношення сторін прямокутників на рис. 4в є $\max_{i=\{2,3,4\}} \max_{r,p,q>0} k_i(r,p,q)$, де функції $k_i(r,p,q)$ визначаються формулами (3), (4).

Таблиця 1

Аналіз залежностей параметра q

k_i	$q=f_i(r, p, C_i), C_i=const$	Умови додатної визначеності q
k_1	$q = \frac{\sqrt{(1-2C_1^2)(r^2+p^2)} + \sqrt{(1-4C_1^2)(r^2+p^2)^2 - 16C_1^2 r^2 p^2}}{2\sqrt{2}C_1}$	$0 < C_1 < 0.5$
k_2	$q = \frac{\sqrt{(C_2^2-2)(r^2+p^2)} + C_2\sqrt{(C_2^2-4)(r^2+p^2)^2 + 16r^2 p^2}}{2\sqrt{2}}$	$C_2 > 1$
k_3	$q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_3^2(r^2+p^2)^2 - 4r^2 p^2}{r^2+p^2}}$	$C_3 > 0$
k_4	$q = \sqrt{\frac{(r^2+p^2)^2 - 4C_4^2 r^2 p^2}{C_4^2(r^2+p^2)}}$	$0 < C_4 < 16.9$

Аналогічні результати можна отримати для співвідношення сторін прямокутників відносно вершин K_2 та K_1 грані $K_1K_2K_3$ (рис. 4в) шляхом циклічної перестановки параметрів r, p, q в формулах (3), (4). Вказані перетворення не змінюють максимального значення співвідношення сторін грані $K_1K_2K_3$ та умов додатної визначеності одного з параметрів як функції двох інших параметрів (табл. 1).

Отримані співвідношення сторін для грані $K_1K_2K_3$ залишаються справедливими для граней біпіраміди, де один, два або три параметри дорівнюють одиниці.

Слід зауважити, що коли $r=p=q=1$, виконуються умови $\frac{1}{\sqrt{3}}k_2(1,1,1)=1$ та $\frac{1}{\sqrt{3}}k_3(1,1,1)=1$, які є справедливими для правильного трикутника. Одночасно $\frac{1}{\sqrt{3}}k_4(1,1,1) \neq 1$, що протирічить властивостям метрики AR.

Тому значення функції $k_4(r,p,q)$ далі не враховуються при визначенні показника якості AR.

Таким чином, метрична характеристика Aspect Ratio біпіраміди з одним/двома/трьома рухомими вузлами визначається формулою:

$$AR = \frac{\max_{i=\{2,3\}} \max_{r,p,q>0} k_i(r,p,q)}{\sqrt{3}}, \quad (5)$$

де $k_i(r,p,q)$ задовольняють рівностям (3), (4).

Згідно з рекомендаціями ANSYS [7] найбільше значення AR у формулі (5) залежить від розв'язувача ANSYS, а саме: AR<10.100 (**Mechanical, Nonlinear Mechanical, Electromagnetics**) та AR<1000 (CFX).

Асиметрія [Skewness]. Skewness є однією з основних мір якості сітки, які використовують в ANSYS. Цей показник визначає, наскільки близькою до ідеальної є грань або комірка скінченно-елементної сітки. В загальному випадку асиметрія визначається методом нормалізованого кутового відхилення, яке для граней 3D-елементів може бути знайдене за формулою [8]:

$$Skewness = \max \left\{ \frac{\theta_{\max} - \theta_e}{180^\circ - \theta_e}, \frac{\theta_e - \theta_{\min}}{\theta_e} \right\}, \quad (6)$$

де $\theta_{\max}$ – найбільший кут грані CE; $\theta_{\min}$ – найменший кут грані CE; θ_e – кут рівносторонньої грані CE.

Згідно з означенням показник асиметрії *Skewness* приймає значення в інтервалі від нуля до одиниці, де нуль відповідає грані правильної геометричної форми (рівносторонній трикутнику для біпіраміди), а значення одиниця вказує на виродження грані (трикутника для біпіраміди) у відрізок.

Для біпіраміди метрика якості *Skewness* визначається як максимальний серед показників асиметрії, що відповідають граням CE. Очевидно, що найбільше значення *Skewness* досягається на грані $K_1K_2K_3$ (рис. 1), яка в загальному випадку є гострокутним трикутником. При цьому для найбільшого та найменшого кутів, які є функціями параметрів r, p, q , справедливі оцінки:

$$\theta_e \leq \theta_{\max}(r,p,q) < 90^\circ, 0^\circ < \theta_{\min}(r,p,q) \leq \theta_e, \quad (7)$$

де $\theta_e=60^\circ$.

Аналізуючи нерівності (7), слід зазначити, що величини внутрішніх кутів $\theta_{\min}$ та $\theta_{\max}$ грані $K_1K_2K_5$ можуть виявитись близькими до 0° та 90° відповідно. Для таких кутів показник асиметрії біпіраміди є близьким до одиниці, що небажано при обчисленнях МСЕ. Тому згідно з рекомендаціями ANSYS [8], необхідно визначити область допустимих значень параметрів r, p, q біпіраміди, в якій показник асиметрії *Skewness* відповідає якості комірки *good* ($0.25 < \text{Skewness} < 0.5$) або *excellent* ($0 < \text{Skewness} \leq 0.25$).

На основі аналізу рівності (6), умов (7) та властивостей внутрішніх кутів трикутника виявлено, що нерівність $0.25 < \text{Skewness} \leq 0.5$ є справедливою, коли значення функцій $\theta_{\max}(r, p, q)$ та $\theta_{\min}(r, p, q)$ задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} \theta_{\max}(r, p, q) < 90^\circ; \\ 45^\circ \leq \theta_{\min}(r, p, q) \leq 60^\circ; \\ \theta_{\max}(r, p, q) + 2\theta_{\min}(r, p, q) < 180^\circ. \end{cases} \quad (8)$$

Умова $0 < \text{Skewness} \leq 0.25$ виконується, коли

$$\begin{cases} 60^\circ \leq \theta_{\max}(r, p, q) < 90^\circ; \\ 45^\circ \leq \theta_{\min}(r, p, q) \leq 60^\circ; \\ \theta_{\max}(r, p, q) + 2\theta_{\min}(r, p, q) \leq 180^\circ. \end{cases} \quad (9)$$

Кожна з систем нерівностей може бути доповнена інтервальною оцінкою для величини третього кута θ грані $K_1K_2K_5$, а саме: $30^\circ \leq \theta(r, p, q) \leq 60^\circ$ для (8) та $45^\circ \leq \theta(r, p, q) \leq 75^\circ$ для (9). При цьому внутрішні кути при вершинах трикутника $K_1K_2K_5$ є функціями параметрів r, p, q біпіраміди:

$$\begin{aligned} \text{AngleK1} &= \arccos\left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + q^2} \sqrt{r^2 + p^2}}\right); \\ \text{AngleK2} &= \arccos\left(\frac{p^2}{\sqrt{r^2 + p^2} \sqrt{p^2 + q^2}}\right); \\ \text{AngleK5} &= \arccos\left(\frac{q^2}{\sqrt{r^2 + q^2} \sqrt{p^2 + q^2}}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

На рис. 5а,б представлено області допустимих значень r, p, q розв'язків систем (8), (9) відповідно, коли $\theta_{\max}$ є кутом при вершині K_5 , $\theta_{\min}$ – кутом при вершині K_1 (рис. 1). Кожна з областей обмежена тригранним кутом $OABC$, гранями якого є поверхні рівня 1, 2, 3 функцій $\theta_{\max}(r, p, q)$, $\theta_{\min}(r, p, q)$ та $\theta(r, p, q)$.

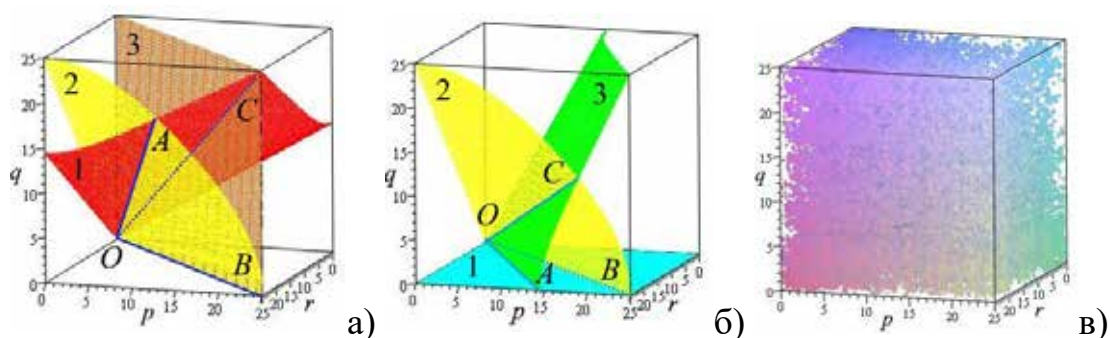


Рис. 5. $OABC$ – область допустимих значень r, p, q , обмежена поверхнями рівня:

- а) $1 - \theta_{\max}(r, p, q) = 60^\circ$, $2 - \theta_{\min}(r, p, q) = 45^\circ$, $3 - \theta_{\max}(r, p, q) + 2\theta_{\min}(r, p, q) = 180^\circ$; б) $1 - \theta_{\max}(r, p, q) = 0^\circ$, $2 - \theta_{\min}(r, p, q) = 45^\circ$, $3 - \theta(r, p, q) = 60^\circ$; в) $\theta_{\max}(r, p, q) + \theta_{\min}(r, p, q) + \theta(r, p, q) = 180^\circ$.

Джерело: побудовано автором в СКА Maple

Будь-яка точка (r, p, q) , яка належить області $OABC$ в перетині з дискретним набором точок (рис. 5в), забезпечує вимоги до якості комірки скінченно-елементної решітки *good* (рис. 5а) або *excellent* (рис. 5б), коли $\theta_{\max}$, $\theta_{\min}$ асоційовано з кутами грані $K_1K_2K_5$ при вершинах K_5 , K_1 відповідно.

Очевидно, що розв'язки систем нерівностей (8), (9) можна представити геометрично, змінюючи відповідність $\theta_{\max}, \theta_{\min}$ іншим кутам грані $K_1K_2K_5$. За таких перетворень змінюється лише порядок аргументів функцій $\theta_{\max}(r,p,q), \theta_{\min}(r,p,q)$ та $\theta(r,p,q)$, що не впливає на оцінку асиметрії досліджуваного СЕ.

Якість ортогональності [Orthogonal Quality]. Показник Orthogonal Quality (OQ) є мірою якості сітки, що обчислюється для 3D-елементів за формулою [9]:

$$OQ = \min_i \frac{\bar{A}_i \cdot \bar{f}_i}{|\bar{A}_i| |\bar{f}_i|}, \quad (11)$$

де $\bar{A}_i$ – нормальний вектор грані i , $\bar{f}_i$ – вектор, спрямований від центру ваги комірки до центру ваги грані i , а мінімум визначається по всіх гранях СЕ.

Формула (11) використовується для СЕ, які знаходяться в приграничному шарі скінченно-елементної решітки.

Значення показника OQ коливається в межах від нуля до одиниці, де нуль є найгіршою характеристикою СЕ, а одиниця свідчить про те, що СЕ має форму правильного багатогранника (октаедр для біпіраміди).

Для граней біпіраміди косинуси кутів між векторами $\bar{A}_i$ та $\bar{f}_i$, де $i=1,8$, є функціями параметрів r, p, q . При дослідженні поверхонь рівня вказаних функцій виявлено, що мінімальне значення, яке визначається по i , досягається на гранях $K_1K_2K_6, K_2K_3K_5, K_1K_4K_5$ (рис. 1) та наближено дорівнює 0.09. Функція, яка відповідає грані $K_1K_2K_6$, визначається рівністю:

$$CSI_{126} = \frac{\frac{r+3}{r} + \frac{p+3}{p} + 3q+1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{p^2} + 1} \sqrt{(r+3)^2 + (p+3)^2 + (3q+1)^2}}, \quad (12)$$

де $r, p, q > 0$.

При цьому координати центра ваги $((r-1)/4, (p-1)/4, (q-1)/4)$ комірки в формі біпіраміди, які використовуються для визначення координат вектора $\bar{f}_i$, знайдено за формулами [10].

Функції CSI_{235} та CSI_{145} , які асоційовано з гранями $K_2K_3K_5, K_1K_4K_5$, легко отримати циклічною перестановкою параметрів r, p, q у формулі (12).

На рис. 6а представлено три різних області значень параметрів r, p, q , при яких показник якості біпіраміди $OQ=0.09$. На рис. 6б одна з цих областей зображена в збільшеному масштабі.

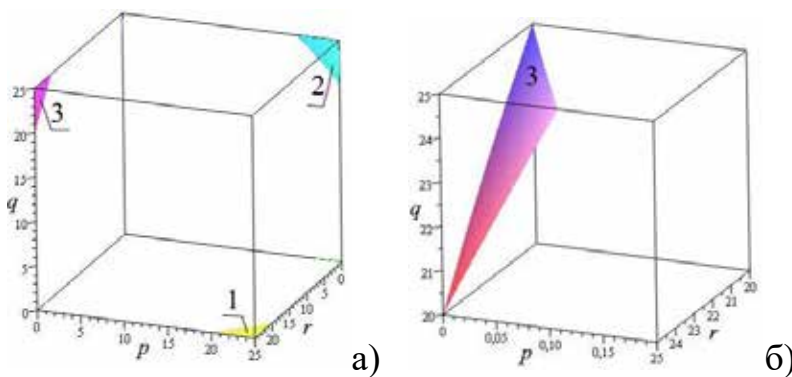


Рис. 6. Поверхні рівня функцій:

а) 1 – $CSI_{126}=0.09$, 2 – $CSI_{235}=0.09$, 3 – $CSI_{145}=0.09$, коли $0 \leq r, p, q \leq 25$; б) 3 – $CSI_{145}=0.09$, коли $20 \leq r, q \leq 25, 0 \leq p \leq 0.2$.

Джерело: побудовано автором в СКА Maple

Аналізуючи рис. 6, слід відмітити, що показник якості OQ біпіраміди наближено дорівнює 0.09 за умови, що два параметри приймають значення більше 20, а третій є меншим 0.2. При зменшенні верхньої межі проміжку, якому належать параметри r, p, q , значення OQ збільшується. Але відповідно до таблиці помилок та попереджень, які прийняті в ANSYS [4], для побудови скінченно-елементної сітки достатньо виконання умови $OQ > 0$. Для функцій косинусів кутів, які знайдено за формулою (11), умова $OQ > 0$ виконується для кожної грані біпіраміди.

Висновки. У роботі досліджено метричні показники якості біпіраміди з одним/двома/трьома рухомими вузлами, які визначають умови застосування комірок неправильної геометричної форми

в скінченно-елементних розрахунках. На основі правил та методів обчислення основних метрик якості СЕ, які прийнято в ANSYS, отримано такі результати.

1. Знайдено інтервальну оцінку для показника Element Quality, який є функцією параметрів видовження/стиснення біпіраміди. Найменше значення Element Quality визначено згідно з вимогами до 3D-елементів, які застосовують у розв'язувачі ANSYS Mechanical. Межі визначення Element Quality дозволяють використовувати СЕ в формі біпіраміди при розв'язанні задач лінійної механіки, теорії пружності та теплопровідності.

2. Отримано формулу для обчислення показника Aspect Ratio як функцію параметрів біпіраміди, що дозволяє виконувати розрахунки на основі пошуку максимального значення двох функцій, вигляд яких визначає максимальне значення параметрів біпіраміди. Дана формула може бути застосована при алгоритмізації MCE для перевірки умов, яким має задовольняти верхня межа показника Aspect Ratio у розв'язувачах ANSYS Mechanical, Electromagnetics та CFX.

3. Отримано обмеження в вигляді систем нерівностей для величин внутрішніх кутів граней біпіраміди, що задовольняють вимоги на рівні good та excellent для показника якості Skewness, які рекомендовано в ANSYS. Дані обмеження легко адаптувати до будь-якої грані біпіраміди, оскільки найбільший та найменший кути визначаються лише координатами вершин трикутників, що зменшує часову складність алгоритму MCE при визначенні показника асиметрії комірок сітки.

4. Встановлено додатну визначеність показника якості Orthogonal Quality біпіраміди з одним/двома/трьома рухомими вузлами. Аналіз значень Orthogonal Quality біпіраміди виконано за формулою для СЕ, які знаходяться в приграничному шарі скінченно-елементної сітки. Згідно з рекомендаціями ANSYS умова додатної визначеності метрики Orthogonal Quality є достатньою для використання біпіраміди при дискретизації областей у MCE.

5. Отримані результати свідчать про позитивні умови для створення алгоритмів на основі MCE з використанням біпірамід. Подальші дослідження вимагають отримання кубатурних формул для біпіраміди з двома/трьома рухомими вузлами, які є необхідними для проведення обчислювальних експериментів.

Список використаних джерел:

1. Мотайло А.П. Базиси біпіраміди. *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*. № 2. Вінниця, 2024. С. 1–10. DOI: 10.31649/2307-5376-2024-2-76-85 (дата звернення: 18.04.2025).
2. Мотайло А.П. Показники якості скінченного елемента в формі біпіраміди. *Importance of Soft Skills for Life and Scientific Success*: матеріали IV-ої міжнародної науково-практичної інтернет-конференції (м. Дніпро, 6–7 березня 2025). Дніпро, 2025. С. 144–147. URL: <https://surli.cc/yjgueq> (дата звернення: 18.04.2025).
3. ANSYS Mesh Metrics Explained – FEA Tips. URL: <https://featips.com/2022/11/21/ansys-mesh-metrics-explained/> (date of access: 18.04.2025).
4. Error and Warning Limits. ANSYS. URL: <https://surli.li/sjkvue> (date of access: 18.04.2025).
5. How Element Quality is Calculated. Altair HyperMesh. URL: <https://surli.li/yqotqn> (date of access: 18.04.2025).
6. Aspect Ratio. ANSYS. URL: <https://surli.li/nfvdfc> (date of access: 18.04.2025).
7. Lecture7: Mesh Quality & Advanced Topics – FEA Tips. URL: <https://surli.li/uzjqjb> (date of access: 18.04.2025).
8. Skewness. ANSYS. URL: <https://surli.cc/qoatho> (date of access: 18.04.2025).
9. Orthogonal Quality. ANSYS. URL: <https://surli.lu/upmcqh> (date of access: 18.04.2025).
10. Centroids of Areas via Integration. Engineering: LibreTexts. URL: <https://surli.li/snkoyz> (date of access: 18.04.2025).

References:

1. Motailo, A. P. (2024). Bazysy bipiramidy [Bipyramid bases]. *Naukovi pratsi Vinnytskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*, (2). 1-10. <https://doi.org/10.31649/2307-5376-2024-2-76-85>
2. Motailo, A. (2025). Pokaznyky yakosti skinchennoho elementa v formi bipiramidy. *Importance of Soft Skills For Life And Scientific Success*: Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Internet Conference (s. 144–147). March 6-7, 2025. Dnipro, Ukraine. [Ukrainian]. Retrieved from <https://surli.li/ewjtn>
3. *ANSYS Mesh Metrics Explained*. Retrieved from <https://featips.com/2022/11/21/ansys-mesh-metrics-explained/>
4. Error and Warning Limits. ANSYS. Retrieved from <https://surli.li/gvxiis>
5. How Element Quality is Calculated. *Altair HyperMesh*. Retrieved from <https://surli.li/qlaclh>
6. Aspect Ratio. ANSYS. Retrieved from <https://surli.cc/sgcbks>
7. *Lecture7: Mesh Quality & Advanced Topics – FEA Tips*. Retrieved from <https://surli.li/kwljjb>
8. Skewness. ANSYS. Retrieved from <https://surli.li/jwraat>
9. Orthogonal Quality. ANSYS. Retrieved from <https://surli.lu/tqewpr>
10. *Centroids of Areas via Integration. Engineering: LibreTexts*. Retrieved from <https://surli.li/dmwoga>